Kepler and the Rhombic Dodecahedron

Kepler y el dodecaedro rómbico

Roberto Cardil Ricol
IES Alonso Quijano de Alcalá de Henares (Madrid)
roberto.cardil@gmail.com
www.matematicasvisuales.com

Resumen

The principal goal of this article is to study the polyhedron called the Rhombic Dodecahedron. The Rhombic Dodecahedron is a simple, beautiful and interesting polyhedron that can delight young and adults alike. Johannes Kepler discovered it and we are going to follow Kepler's wonderful mind in our travel exploring its properties in an historical context. Our main source will be Kepler's book 'The Six-Cornered Snowflake'. How the Rhombic Dodecahedron was conceived is fascinating because Kepler discovered it inspired in Nature, taking a deep look into how bees build their cells. To follow all these ideas is not easy without real mathematical models. A second objective of this article is to encourage readers to build their own polyhedra and to play with them. Building polyhedra is a relaxing activity and the results are appealing because of their beauty. But there is more: we learn mathematical properties of this bodies when we build, look and touch them.

Introducción

El dodecaedro rómbico es un poliedro sencillo y bonito. Tiene propiedades matemáticas muy interesantes. La historia de su descubrimiento es fascinante y nos permite hablar de su descubridor, Johannes Kepler, y situar el poliedro en su contexto histórico. Por otro lado, veremos que Kepler encontró su inspiración en la observación de la Naturaleza. La Historia de las Matemáticas y el estudio de la Naturaleza se dan la mano en este poliedro. El desarrollo de estas ideas, en los apartados 1 y 2, constituye la primera parte de este artículo.

En la segunda parte se propone la construcción del dodecaedro rómbico y de la celda de las abejas. A pesar de su brevedad podemos verla como el núcleo del artículo. Una vez más se insiste en la conveniencia de realizar modelos matemáticos. Como es bien sabido, la construcción de poliedros nos ayuda a desarrollar la visión espacial y mejorar nuestra comprensión de problemas geométricos. Por otra parte, es una actividad relajante en la que interviene nuestra habilidad manual y el deseo de obtener un resultado limpio y perfecto (que requiere un poco de técnica). La belleza del resultado atrae a todo el mundo. Estos son motivos más que suficientes para construir figuras geométricas. Pero no nos olvidamos de lo que puede ser fundamental para un profesor o aficionado a las Matemáticas: a partir de la construcción obtendremos resultados matemáticos.

Si en muchas ocasiones es muy conveniente realizar construcciones geométricas, en otras resulta casi imprescindible. Dos ejemplos claros se nos presentan cuando queremos estudiar teselaciones del espacio o empaquetamiento de esferas: dibujos y fotografías se vuelven confusos e incluso las aplicaciones interactivas son clarificadoras solo para personas entrenadas y con buena visión espacial.

Esta propuesta ha sido puesta en práctica en repetidas ocasiones con alumnos y, en particular, en varias sesiones del Taller de Talento Matemático de Zaragoza. Siempre con buenos resultados. Vamos sobre seguro. Sobre el tema se ha realizado una exposición en el IES Alonso Quijano de Alcalá de Henares en la que se han explorado varias técnicas de construcción, en particular, el uso de la impresión 3d para la realización de grandes estructuras.

El artículo se cierra con un repaso rápido a otros tres puntos de vista sobre el dodecaedro rómbico que son distintos y complementarios. Nos mostrarán la creatividad de Kepler y su relación, por un lado, con unos problemas sencillos pero, por otro, también ideas profundas que han resultado ser muy fértiles para las Matemáticas.

1. Kepler y su tiempo

Johannes Kepler (1571-1630) fue un científico, matemático, astrónomo y astrólogo alemán.

Podemos decir que la época en la que vivió Kepler es heredera de la explosión intelectual del Renacimiento y precursora de los revolucionarios descubrimientos de Newton y Leibniz.

A partir del siglo XVI y favorecido por la invención de la imprenta, se difunden y estudian seriamente las grandes obras maestras de los matemáticos griegos, como los Elementos de Euclides, las Cónicas de Apolonio y los trabajos de Arquímedes. La Geometría interesó tanto a científicos como a artistas y artesanos.

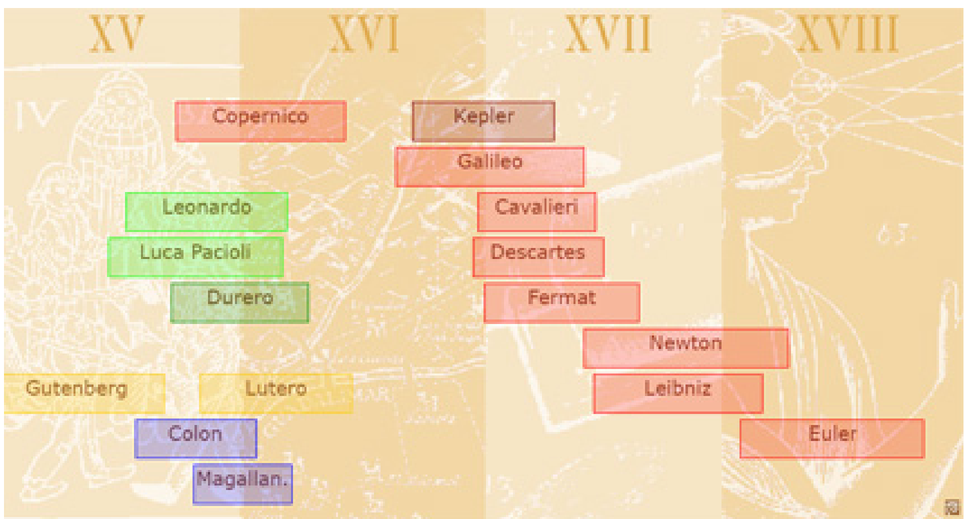

Figura 1: *Kepler y su tiempo.*

Una de las más importantes nuevas ideas que influyeron en Kepler fue la cosmología heliocéntrica de Copérnico. La publicación del libro de Copérnico 'De Revolutionibus' en 1543 inicia lo que llamamos la Revolución Copernicana. Sus observaciones le llevan a apoyar la idea de que la Tierra y todos los planetas giran en torno al Sol. En particular, la Tierra ya no era el centro estático del Universo. Desde su juventud, Kepler fue un defensor del modelo heliocéntrico de Copérnico.

Johannes Kepler nació en la ciudad alemana de Weil der Stadt in 1571. Su familia era pobre. Él fue un chico inteligente y de salud delicada.

Su vida no fue fácil, no gozó de buena salud, casi siempre con problemas financieros y dificultades familiares. Tuvo que cambiar de residencia varias veces: estudió en la Universidad de Túbingen, fue profesor de Matemáticas en Graz, después trabajó para el famoso astrónomo Tycho Brahe en Praga, donde llegó a ser Matemático Imperial, luego vivió en Linz y en Sagan. Murió en Regensburg en 1630. Se vio afectado por conflictos religiosos (Kepler fue un hombre muy religioso) e incluso guerras (la Guerra de los Treinta años, que devastó Alemania, comenzó en 1618).

A pesar de todas estas circunstancias, Kepler fue capaz de hacer importantes contribuciones a la ciencia, en particular a la Astronomía, Matemáticas y Óptica.

Como astrónomo, Kepler es famoso por su descubrimiento de las tres leyes del movimiento de los planetas alrededor del Sol. Las conocemos como las Leyes de Kepler y, posteriormente, fueron deducidas por Newton.

Como matemático, Kepler descubrió dos nuevos poliedros regulares no convexos (pequeño dodecaedro estrellado y gran dodecaedro estrellado), dos nuevos poliedros rómbicos (el dodecaedro rómbico y el triacontaedro), trabajó en el problema del empaquetamiento óptimo de esferas (Conjetura de Kepler), se interesó por los logaritmos y estudió volúmenes de cuerpos de revolución.

Debido a sus contribuciones en el desarrollo del Cálculo y su interés en los poliedros podemos decir que Kepler fue un digno heredero de Arquímedes y precursor de los descubrimientos de Newton y Leibniz.

Kepler tenía mucha imaginación y exploraba los problemas desde puntos de vista diferentes. Era muy observador y una simple anécdota le llevaba a plantearse cuestiones profundas. Muchas veces nos describe el devenir de su pensamiento y nosotros tenemos la oportunidad de seguir los caminos que transita una mente genial guiada por sus conocimientos e intuición. Era buen escritor y hoy en día podemos leer partes de su obra con placer e instrucción.

Un primer ejemplo de una de estas anécdota le ocurrió en su segunda boda. Kepler se sorprendió al ver como el mercader del vino que se consumió en la ceremonia medía el volumen de un tonel, simplemente introduciendo una vara de madera por el agujero del tonel. Como no se quedó muy convencido se puso a estudiar cómo calcular volúmenes de cuerpos de revolución y escribió un libro entero sobre este asunto (quizás la contribución más importante en este campo posterior a Arquímedes).

Otra anécdota está en el origen del pequeño y precioso libro que va a ser nuestra principal fuente para tratar el asunto del descubrimiento del dodecaedro rómbico.

El título de esta joya es 'Strena seu de nive sexangula' que se puede traducir por 'Regalo de Año Nuevo. Sobre el copo de nieve hexagonal'. Fue escrito como regalo para su amigo y benefactor Matthew Wacker von Wackenfels. Kepler nos cuenta que iba pensando y paseando por el Puente de Carlos un día invernal en Praga...

Por suerte se dio la feliz casualidad de que un poco de vapor de agua se condensó por el frío en forma de nieve, y sus copos cayeron aquí y allá sobre mi abrigo, todos con seis esquinas y emplumados radios. ¡Por Hércules, doy mi palabra, eso es una cosa más pequeña que cualquier gota y que sin embargo posee estructura! Había encontrado el regalo ideal de año nuevo para el devoto de nada, la cosa digna que puede ofrecer un matemático, que no tiene nada y no recibe nada, ya que los copos de nieve bajan del cielo y se asemejan a las estrellas. [Kepler. *De Nive Sexangula*, traducción castellana y notas de Ana García Azcárate y Ángel Requena Fraile, p. 8][1].

A lo largo del libro intentará explicar la forma hexagonal de los cristales de nieve pero su imaginación volará desde los panales de las abejas a los guisantes, de las semillas de la granada a las balas de cañón y, en el medio de sus pensamientos, nos va a explicar cómo descubre un nuevo poliedro, el dodecaedro rómbico.

Vamos a seguir los pensamientos de Kepler sobre este poliedro y cómo su intuición le lleva a descubrirlo en la base de las celdas de las abejas.

2. Los panales de las abejas y el descubrimiento del dodecaedro rómbico

El primer matemático del que tenemos noticia que se interesó por este tema fue Pappus de Alejandría (alrededor del año 320 de nuestra era). En sus 'Colecciones Matemáticas', Pappus consideró cómo las abejas construyen sus panales, con la forma hexagonal de las celdas, y escribió:

... antes de recolectar el nectar de las flores más bonitas que crecen en la tierra, hacen para él, para la recepción de la miel, los recipientes que llamamos panales (con sus celdas) todas iguales, semejantes y contiguas unas a otras, y de forma hexagonal. Y podemos inferir que esto lo han logrado en virtud de una cierta previsión geométrica. Deben pensar por fuerza que las figuras deben de ser contiguas unas a otras, es decir, que tengan sus lados en común, de modo que ninguna materia extraña pueda entrar en los intersticios entre ellas y manchar la pureza de su producto. Sólo tres figuras geométricas satisfacen la condición, y me refiero solo a figuras regulares que sean equiláteras y equiángulas, porque las abejas no considerarían figuras que no fueran uniformes... Habiendo entonces tres figuras capaces por ellas mismas de llenar el espacio en torno al mismo punto [desde luego, se refiere al triángulo, cuadrado y hexágono], las abejas, debido a su sabiduría instintiva, eligen para la construcción de su colmena la figura que tiene más ángulos porque ellas conciben que contendrá más miel que cualquiera de las otras dos.[2].

En este famoso y precioso párrafo trata varios asuntos que no son nada sencillos. Y no me refiero a si las abejas son inteligentes o no, sino a los problemas de optimización que plantea.

Nosotros nos vamos a quedar con lo más básico, que es el tema de las teselaciones planas o mosaicos. Es un tema con muchas posibilidades. Las más sencillas son las formadas por polígonos regulares iguales, de las que hay tres, formadas por triángulos, cuadrados y hexágonos.

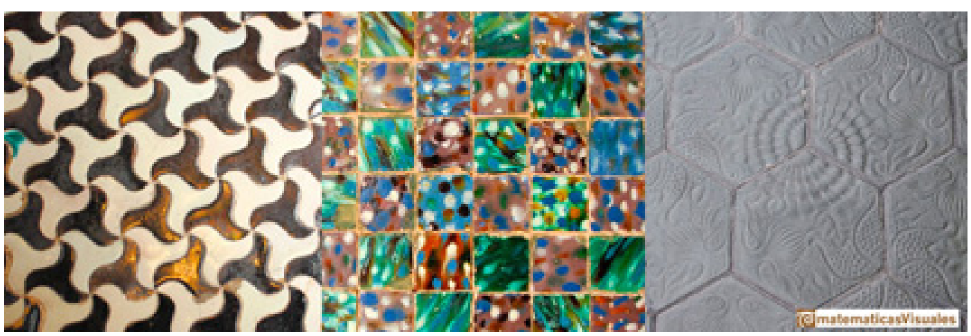

Figura 2: *Tres ejemplos de teselaciones planas.*

La imagen anterior es una aproximación artística a estas tres treselaciones regulares. Una basada en el triángulo equilátero (en la Alhambra de Granada), la segunda se basa en la cuadrícula (los Reales Alcázares de Sevilla) y la tercera, basada en hexágonos, fue diseñada por el arquitecto Antoni Gaudí (Barcelona).

La misma idea pero aplicada en dimensión 3, es decir, las teselaciones del espacio, jugarán un papel importante en nuestro estudio del dodecaedro rómbico. Nos preguntamos ¿cómo podemos rellenar el espacio usando poliedros iguales? La cuestión no es nada sencilla pero tenemos, al menos, una respuesta clara y que nos resulta familiar: el cubo rellena el espacio. Un poco más en general podemos decir que con paralelepípedos iguales rellenamos el espacio. Pero aquí nos conviene destacar que el cubo es el único de los poliedros regulares que tiene esta propiedad.

El texto de Pappus es un buen ejemplo de la fascinación que la regularidad de los panales de las abejas ha ejercido en la Humanidad desde tiempo inmemorial. Hemos visto que la estructura hexagonal era bien conocida. Pero tienen que pasar más de mil doscientos años después de Pappus para que alguien se fije en cómo es el fondo de las celdas de las abejas, escriba sobre ello y saque interesantes conclusiones matemáticas. Ese genio fue Kepler.

Además, tenemos la suerte de que él mismo nos va contando cómo funciona su mente creativa en su librito 'De nive sexangula'. Leerlo es un placer y un auténtico regalo [1].

Sobre la estructura de los panales de las abejas, Kepler escribió:

Si usted pregunta a los geómetras sobre la forma de los panales de las abejas, su respuesta será en forma de hexágono. La respuesta es obvia tras un mero vistazo a las aperturas o puertas, y a las paredes con los cuales están construidos los alveolos. Cada celda esta rodeada por otras seis, y cada una comparte una pared medianera entre ella y la siguiente. Pero cuando usted examine el fondo de las celdas, verá que cada terminación está formada por tres planos en ángulo obtuso. Seis vértices forman este fondo (usted más bien podría llamarlo la quilla) cada una de las seis paredes de la celda terminan uniéndose, insertadas en un ángulo triedro, exactamente como el ángulo inferior de la quilla; los tres de más abajo en un ángulo con cuatro aristas [...] Las superficies planas de la quilla son siempre tres. Todas se parecen y con la forma que los geómetras llamamos rombo. Págs. 11-12 de [1].

A partir de la observación de este maravilloso ejemplo tomado de la Naturaleza, Kepler descubre un poliedro formado por 12 caras rómbicas que llamamos dodecaedro rómbico o rombododecaedro.

La siguiente ilustración se encuentra en otro libro de Kepler, 'Harmonice Mundi' ('La armonía de los mundos', publicado en 1619) y nos muestra claramente cómo Kepler concibe este poliedro:

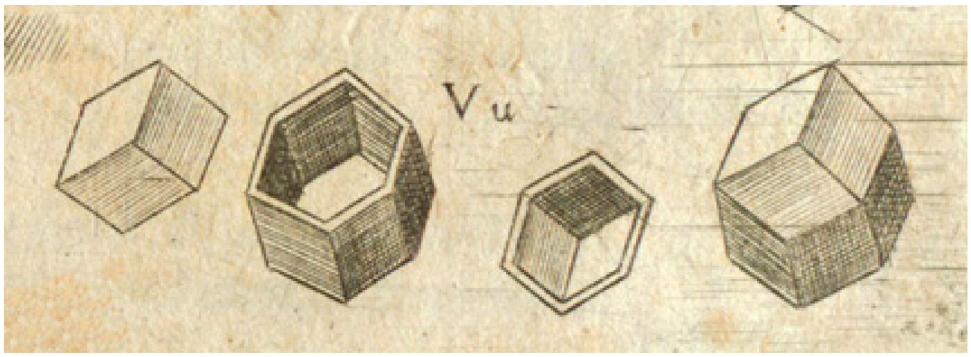

Figura 3: *Dibujo del dodecaedro rómbico en 'Harmonice Mundi'.*

Seis rombos forman un 'cinturón'. Nos podemos imaginar esos seis rombos sobre las paredes del prisma hexagonal de la celda. Añade tres rombos más de la misma manera que las abejas cierran sus celdas (lo que Kepler llama 'la quilla') y añade tres rombos más para cerrar el poliedro (las abejas no cierran la celda de este modo pues necesitan una entrada).

A partir de esta descripción del dodecaedro rómbico, ¿qué propiedades básicas podemos deducir y cuáles podemos intuir?

El dodecaedro rómbico tiene 12 caras que son rombos y 24 aristas. Los doce rombos son iguales.

Tiene 14 vértices de dos tipos distintos. En seis de ellos concurren cuatro aristas (donde los ángulos de los rombos son agudos) y en ocho vértices concurren tres aristas (los ángulos de los rombos son obtusos).

Seis rombos forman un cinturón. De hecho, el dodecaedro rómbico puede verse como formado por cuatro cinturones de seis rombos (cada rombo está en dos cinturones).

El ángulo diedro entre dos caras adyacentes de esos rombos que forman un cinturón hexagonal es de 120º. Puede probarse que el ángulo diedro entre dos caras adyacentes del poliedro es 120º.

Si imaginamos una capa de celda de las abejas y en cada celda colocamos un dodecaedro rómbico lo que nos podemos imaginar es una capa infinita de dodecaedros rómbicos.

Pero sabemos que las abejas construyen sus panales en dos capas.

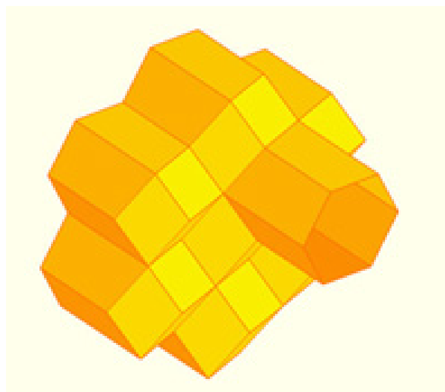

Figura 4: *Las abejas construyen dos capas de celdas.*

Kepler va más allá y saca una importante conclusión:

Además debe anotarse que el orden de las celdas es doble. Uno abierto y el otro con las esquinas de cada quilla en una capa insertada entre las tres esquinas de las tres quillas de la segunda capa. La arquitectura es tal que cualquier celda comparte no sólo seis paredes con las seis celdas que lo rodean en la misma capa, sino también con las superficies planas de la base de las otras tres celdas de la capa contrapuesta. El resultado es que cada abeja tiene nueve vecinas, separadas de cada una y cualquier otra por una pared medianera en común. Pág. 12 de [1].

Entonces podemos imaginar que en esta segunda capa ponemos también un dodecaedro rómbico en cada celda y no tendremos especial dificultad en imaginar que hacemos lo mismo en sucesivas capas.

Lo que Kepler está deduciendo es que el dodecaedro rómbico comparte con el cubo la sorprendente propiedad de teselar el espacio.

Y nosotros no podemos dejar de maravillarnos ante este ejemplo de imaginación y creación matemática a partir de la observación de la Naturaleza. Especialmente si intentamos hacer la prueba nosotros mismos y hemos tenido en las manos un panal de abejas natural. Lo que hace Kepler es, simplemente, genial.

Llegados a este punto, lo que procede es construir un modelo de este poliedro y de la celda de las abejas. Es lo que se propone en la siguiente sección.

3. Construcción de un dodecaedro rómbico y una celda de las abejas

Para disfrutar de este poliedro y comprender mejor sus interesantes propiedades es muy recomendable construir modelos.

Hay muchas maneras de construir este bonito poliedro (origami modular, con doce cartas de la baraja, etc.) pero aquí proponemos una muy sencilla que es una cajita con cartulina. Se trata de un modelo diseñado por John Jeremiah Edminster del poliedro y una variante que tiene la forma de una celda de las abejas. (Se reproducen con autorización del autor).

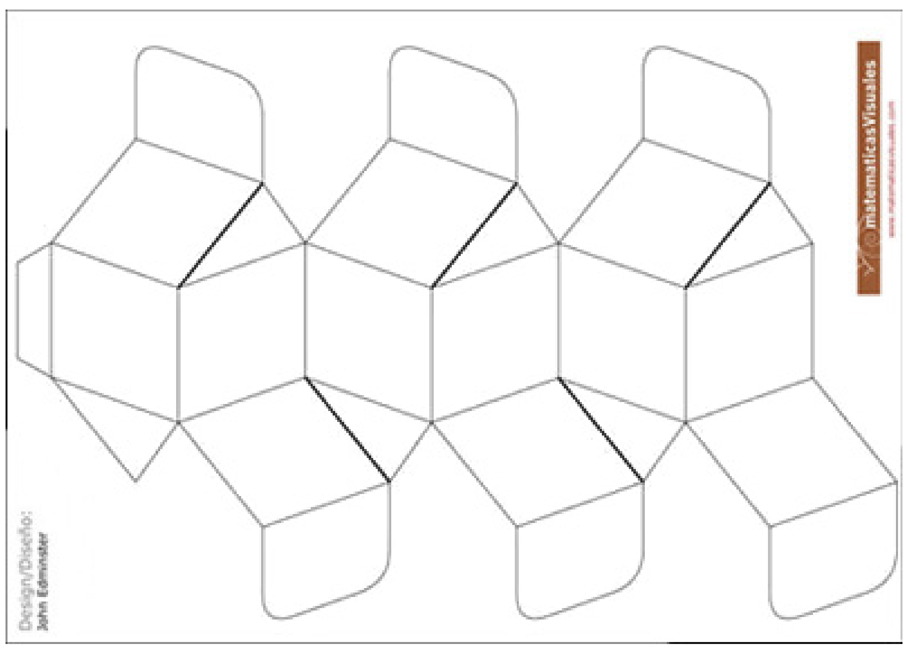

Figura 5: *Desarrollo del dodecaedro rómbico.*

Se pueden descargar los desarrollos de las figuras, imprimir, recortar y pegar. Los modelos están en la página web complentaria a este artículo (`http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/construccionpoliedros/RDindice.html`).

Si construimos varios de estos modelos podemos explorar cómo las abejas contruyen sus panales, cómo encajan unos con otros en dos capas y las propiedades del dodecaedro rómbico, en particular, la de teselar el espacio.

Por mi experiencia puedo decir que un taller con el material expuesto hasta este punto es siempre un éxito: la actividad de las abejas es fascinante y el modelo para construir es sencillo, bonito e interesante.

4. ¿Qué más nos enseña Kepler sobre el dodecaedro rómbico?

La manera en la que Kepler nos muestra cómo ha descubierto el dodecaedro rómbico a partir de la observación de la Naturaleza es maravillosa, desde luego. Pero Kepler va a seguir investigando con su mente creativa este poliedro desde diferentes ángulos sorprendentes y cada uno de ellos nos aportará un punto de vista complementario y una mejor comprensión de esta figura.

Aquí solo podemos hacer un breve resumen de estos logros. El lector interesado disfrutará con 'De Nive Sexangula' [1]. Si se desea profundizar un poco en alguno de los aspectos que vamos a comentar se puede recurrir a la página complementaria de este artículo (`http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/construccionpoliedros/RDindice.html`).

4.1. Una figura conocida desde tiempo inmemorial

Un asunto que nos puede llamar la atención es por qué Kepler está interesado en el dodecaedro rómbico y en qué sentido podemos decir que es el descubridor de este poliedro. Resulta que esta forma era bien conocida desde tiempo inmemorial pues se encuentra en el mineral que llamamos granate.

El hecho de que este poliedro sea irregular (sus caras no son polígonos regulares y sus vértices son de dos tipos distintos) nos puede explicar el porqué este poliedro no ha sido descrito antes. Es mérito de Kepler el comprender su valor matemático. Kepler no solo está muy interesado en los sólidos platónicos (en particular, para su modelo cosmológico) y en los sólidos arquimedianos, sino que también descubre dos nuevos poliedros regulares estrellados y comprende que junto al dodecaedro hay otros dos poliedros rómbicos relacionados. En su estudio de los poliedros podemos decir que es un digno sucesor de Arquímedes.

Figura 6: *Granate.*

4.2. Un problema aplicado: el empaquetamiento de esferas

Si seguimos leyendo 'De Nive Sexangula' veremos que, sin aparente conexión, Kepler se interesa por los granos de la granada pues se fija en que al crecer en un espacio limitado los granos se comprimen y adoptan formas poliédricas. Esto le lleva a lo que podemos considerar el segundo punto de vista de Kepler sobre el dodecaedro rómbico. Se trata de su conexión con un problema relacionado con la Tecnología. Kepler trata el empaquetamiento óptimo de balas de cañón y plantea una hipótesis que llamamos Conjetura de Kepler. ¿Qué relación tiene este tema con el dodecaedro rómbico? Kepler se imagina que las balas de cañón se pueden comprimir y el resultado es nuestro poliedro.

Conviene destacar aquí que estamos ante un ejemplo excelente de cómo la manipulación de un modelo nos ayuda a comprender un problema matemático. Si preparamos trece bolas de arcilla podemos colocar doce de ellas rodeando una central y enseguida vemos que hay dos maneras distintas de hacer esto. Al comprimir una de estas configuraciones obtendremos el dodecaedro rómbico. ¿Qué ocurrirá con la otra?

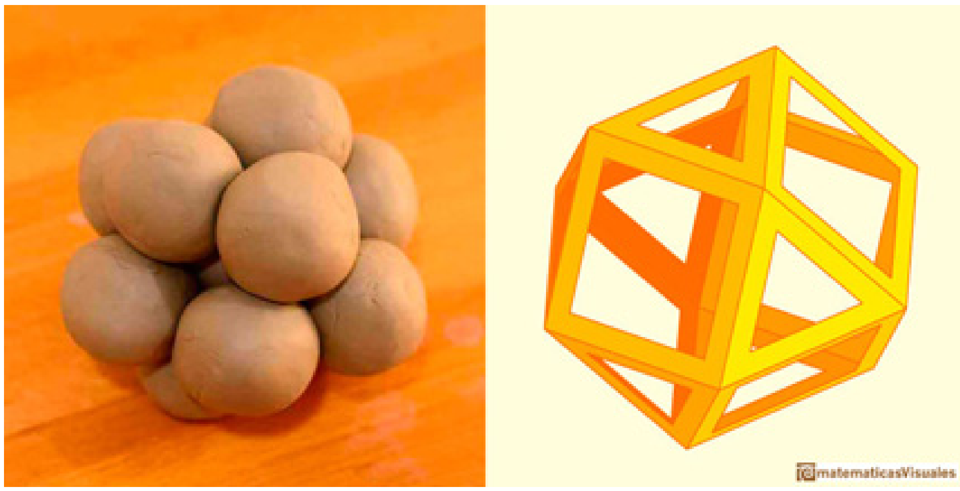

Figura 7: *Empaquetamiento de esferas y cuboctaedro.*

Esta configuración nos muestra también que hay una relación entre nuestro poliedro y el cuboctaedro. El cuboctaedro es un sólido arquimediano. Resulta que ambos poliedros son duales y, por lo tanto, el dodecaedro rómbico es un sólido de Catalan.

Este asunto tiene mucho interés para las Matemáticas. También está relacionado con el estudio de la estructura de la materia (Cristalografía, Química).

4.3. Los artistas del Renacimiento: Un cubo con pirámides

Esta conexión entre la observación de la Naturaleza y un problema de tipo técnico nos muestra la imaginación y genialidad de Kepler. Pero seguimos sin conocer muchas propiedades de este poliedro. De hecho todavía no conocemos sus dimensiones, la forma de sus caras, su volumen. Todavía nos sabemos dibujar su desarrollo. ¿Hay alguna manera más sencilla de ver el dodecaedro rómbico?

El planteamiento de esta cuestión nos permite relacionar este poliedro con el Arte.

Durante el Renacimiento los artistas y artesanos mostraron mucho interés en los poliedros. Un buen ejemplo es Leonardo Da Vinci y sus ilustraciones para el libro de su amigo Luca Pacioli 'La divina proporción'. En este libro se nos muestra una manera de generar nuevos poliedros añadiendo pirámides a las caras de un poliedro base. Si aplicamos este procedimiento a un cubo obtenemos un poliedro de veinticuatro caras que casi es nuestro dodecaedro.

Pero el mérito vuelve a ser de Kepler que es el que nos da la idea clave.

En su libro 'Epitome Astronomiae Copernicanae', Kepler nos muestra que el dodecaedro rómbico es un cubo al que hemos añadido ciertas pirámides de una altura determinada. Un paso sencillo pero fundamental. Cada pareja de triángulos que se apoya en una arista del cubo son coplanarias, formando en total doce caras rómbicas. Esto es lo que consideraremos el tercer punto de vista de Kepler sobre el poliedro.

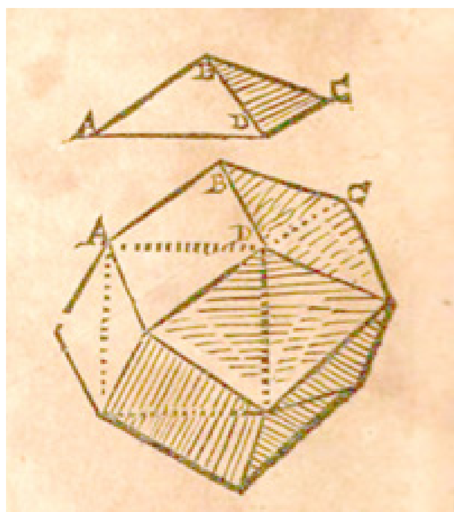

Figura 8: *Un cubo con pirámides.*

Esta es la manera más sencilla de comprender este poliedro. La que nos permite conocer las dimensiones de sus caras rómbicas en relación con su arista, que dentro del dodecaedro rómbico podemos inscribir un cubo (de paso diremos que también un octaedro), que su volumen es el doble que el del cubo inscrito, que tesela el espacio, que el ángulo entre dos caras adyacentes es de 120º, podremos hablar del ángulo de Maraldi, etc...Ver [3].

4.4. Los poliedros rómbicos de Kepler

La manera en la que Kepler nos muestra el dodecaedro rómbico y los tres puntos de vista que hemos estudiado son muy interesantes. Pero, ¿sabemos realmente cómo Kepler descubre este poliedro? Pienso que no. Podemos plantearnos una suposición bastante plausible y que nos va a permitir hablar del cuarto modo de ver este poliedro: El dodecaedro rómbico es una consecuencia lógica de la noción de dualidad aplicada a los poliedros platónicos.

El siguiente párrafo es clave:

Traigo estos rombos a colación para abordar un problema de geometría: ¿existirá un cuerpo, similar a los cinco poliedros sólidos regulares y a los catorce poliedros sólidos arquimedianos que pueda ser construido nada más que con rombos? Encontré dos, uno con afinidad al cubo y al octaedro, otro al dodecaedro y al icosaedro - el cubo mismo puede servir para representar un tercero, poseyendo la afinidad con dos tetraedros acoplados juntos. El primero está formado por doce rombos, el segundo por treinta. Pág 13 de [1].

De los infinitos poliedros que se pueden imaginar formados por rombos iguales, Kepler destaca tres. Dos de ellos son descubrimiento suyo: el formado por doce rombos que es el dodecaedro rómbico y el que tiene treinta caras rómbicas que llamamos triacontaedro.

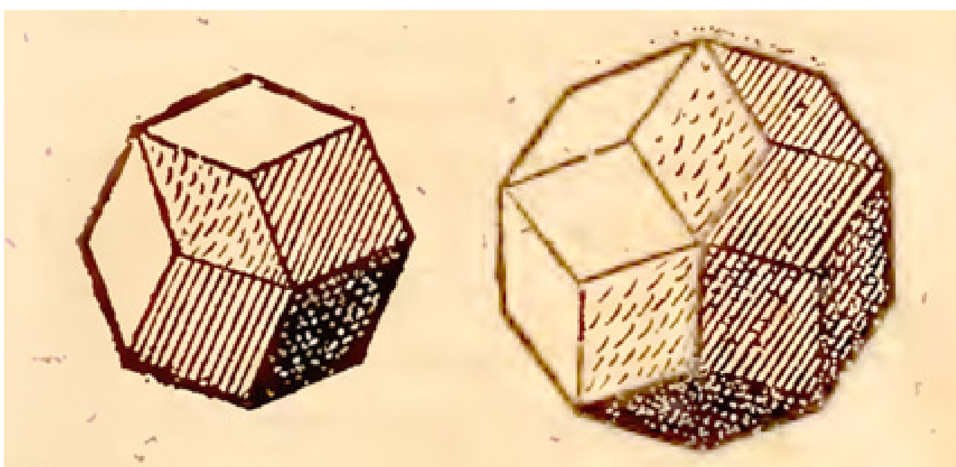

Figura 9: *Dodecaedro rómbico y triacontaedro en 'Harmonice Mundi'.*

El tercero es el archiconocido cubo. El motivo para incluir el cubo no es el hecho trivial de que sus caras son cuadrados, es decir, un caso particular de rombo. El motivo es mucho más profundo e interesante.

Las parejas de sólidos platónicos duales tienen el mismo número de aristas. Cada pareja puede colocarse de modo que pares de aristas se bisequen ortogonalmente. Entonces decimos que están en 'posición recíproca'. Una vez más, es muy conveniente construir modelos para tener una visión clara de estas relaciones.

La intersección del cubo y el octaedro en posición recíproca es el cuboctaedro y su envoltura resulta ser nuestro dodecaedro rómbico. Estos dos poliedros son también duales.

La intersección del icosaedro y del dodecaedro en posición recíproca es el icosidodecaedro. Otro precioso poliedro arquimediano. Su envoltura es el triacontaedro. Ambos poliedros son también duales y, por lo tanto, el triacontaedro es otro sólido de Catalan. Los rombos del triacontaedro son distintos de los del dodecaedro.

El tetraedro es autodual o dual de otro tetraedro. Si colocamos dos tetraedros en posición recíproca obtenemos un poliedro que ya era conocido antes de Kepler. Por ejemplo, fue dibujado por Leonardo. Kepler lo rebautiza 'Stella Octangula' y así lo seguimos conociendo hoy. La intersección es el octaedro y su envoltura es el cubo. Ya sabemos que ambos poliedros también son duales. Por este motivo, el cubo es el tercer poliedro rómbico de Kepler.

Se trata de un ejemplo excelente de cómo la generalización de una idea y el uso de la analogía son herramientas para obtener resultados matemáticos.

Esto es un esbozo de lo que podríamos desarrollar si quisiéramos obtener estas conclusiones de la noción de dualidad.

Resumen

El dodecaedro rómbico es un poliedro que nos ofrece una oportunidad excelente para disfrutar de la Geometría. Nos permite conocer su descubrimiento en un contexto histórico y presentar a su descubridor, el genial astrónomo y matemático Johannes Kepler. Relacionar las Matemáticas con la observación de la Naturaleza, problemas aplicados y el Arte. A lo largo de su estudio nos encontraremos con problemas que han sido de fácil enunciado pero difícil demostración y que han sido muy fructíferos para las Matemáticas. Pero también con cuestiones sencillas muy adecuadas para ser planteadas a jóvenes estudiantes. Avanzando un poco más podremos relacionarlo con la dualidad y, por lo tanto, entrar en el terreno de la Topología. ¿Se puede pedir más?

En el artículo se quiere destacar la importancia de la construcción de modelos matemáticos que entronca con la mejor tradición de enseñanza de las Matemáticas. Y esto lo hacemos no solo por su belleza sino también por que nos ayudan a comprender mejor sus propiedades matemáticas. Además, podemos decir que cuando nos planteamos asuntos como la teselación del espacio o el empaquetamiento de esferas, la construcción de modelos resulta casi imprescindible. Dibujos, fotografías e incluso aplicaciones interactivas se pueden volver confusas para ojos inexpertos y la percepción espacial se va desarrollando con la manipulación de este tipo de modelos.

Referencias

[1] Johannes Kepler (1611), *Strena Seu De Nive Sexangula (Regalo de año nuevo. Sobre el copo de nieve hexagonal)*, Editorial Aviraneta, Traducción y notas de Ana García Azcárate y Ángel Requena Fraile (2011). Este libro se puede descargar gratuitamente gracias a la generosidad de los autores a través del excelente sitio web de Ángel Requena 'Turismo Matemático' en su sección 'Libros descargables'. `https://mateturismo.wordpress.com/libros-descargables/`

[2] Thomas Heath (1921), *A History of Greek Mathematics. Volume II: From Aristarchus to Diophantus*. Oxford University Press.

[3] Roberto Cardil Ricol (2019), `http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/construccionpoliedros/RDindice.html`. Página web complementaria a este artículo con más información sobre la exposición *Kepler, las abejas y el dodecaedro rómbico*, enlaces, modelos para descargar, aplicaciones interactivas y extensa bibliografía.