CAPITULO VI

EL MATERIAL

§ 1. LO CONCRETO EN LA ENSEÑANZA MATEMATICA [1]

EL MOMENTO ACTUAL DE LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA EN ESPAÑA

España se halla actualmente en plena evolución industrial. No puede quedarse rezagada. Le urge colocarse al nivel de los pueblos que tienen una ciencia y una técnica propias, y aportar en lo posible su esfuerzo al progreso universal. Ello exige, ante todo, una adecuada formación matemática de nuestra juventud. No he de insistir ahora en el papel fundamental que la matemática desempeña en el progreso técnico de la humanidad. La técnica es en definitiva el dominio de las fuerzas naturales y no puede lograrse tal dominio sin un conocimiento profundo de las fuentes de energía y de las leyes con que se gobierna. Energética y cibernética, en sus aspectos nuclear y electrónico, respectivamente, son los grandes campos de actividad técnica presente y futura, y ya sabemos la magnitud del instrumental matemático que tales técnicas necesitan.

Para la obra técnico-matemática del futuro se precisarán cuadros cada vez más amplios de investigadores agrupados en equipos de estructura piramidal, es decir, edificados en estratos que vayan desde una amplia base

---

1 Extractamos bajo este título varios fragmentos de la Conferencia que el autor pronunció en el acto inaugural de la XI Reunión de la Comisión Internacional para el estudio y mejora de la enseñanza matemática, que, acompañada de una extensa Exposición internacional de Material Didáctico, se celebró en Madrid del 21 al 27 de abril de 1957.

humana de eficiencia realizadora hasta singulares cúspides creadoras de elevada perspectiva.

A nosotros los educadores nos corresponde asegurar toda la elevación posible de estas estructuras empezando por consolidar y amplificar sus bases en cantidad y calidad. Hacer la cultura elemental y media asequible al mayor número de inteligencias, no sólo en el sentido político de equiparación cultural de clases sociales, sino también en un sentido amplificador de accesibilidad pedagógica. La Matemática ha constituído tradicionalmente la tortura de los escolares del mundo entero. Y la humanidad ha tolerado esta tortura como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario. Pero la enseñanza no debe ser nunca una tortura. Y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces.

La coyuntura matemática actual está clamando por una revisión profunda de modos y métodos de enseñar que permitan ensanchar los campos de eficiencia matemática de nuestra juventud.

LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

Para esta conferencia inicial se me ha sugerido el tema «El papel de lo concreto en la Matemática», título que yo gustosamente invertiría, ya que me parece más justo referirse al «Papel de la Matemática en lo concreto». Trataré de explicarme sin pretender definir «la Matemática» ni «lo concreto».

Para acotar un poco los términos de la cuestión diré que quisiera referirme a la Matemática como actividad mental y no como cúmulo de conocimientos adquiridos mediante ella, y que, ante la imposibilidad de definir «lo concreto», me referiré a este algo «inconcreto» que en lenguaje vulgar se contrapone a veces indebidamente a «lo abstracto». Prescindiendo del juego paradójico de adjetivos, quiero precisar, pues, que abandono todo intento de definición de lo concreto y de lo abstracto y que quiero referirme tan sólo a la disyuntiva o a la simple comparación que los relativiza.

Pero aun así surgen difíciles interrogantes: ¿Qué debemos entender por actividad matemática? ¿En qué consiste la distinción comparativa

que permite situar en cada caso a un lado lo concreto y al otro lo abstracto? Las respuestas que demos a estas preguntas acaso marcarán un sello específico a nuestra enseñanza.

Si consideramos como actividad matemática estrictamente la operatoria relacional entre conceptos ya elaborados, hemos de situarnos inicialmente en un mundo de entes idealizados, bien sea considerándolos como innatos, como indirectamente definidos por sus relaciones o como resultantes de procesos de idealización que caen fuera de la actividad matemática. Este es el punto de vista del matemático puro. Que no es ciertamente el mío como educador. Como tal, yo no puedo dejar de pensar que la actividad matemática de la gran mayoría de mis futuros alumnos se desenvolverá partiendo de situaciones bastante menos depuradas que al paso les ofrezca la realidad concreta. Y aquí hacemos uso, por primera vez, del adjetivo concreto asociándolo al ambiente real en torno al hombre futuro que será nuestro escolar. De poco le servirá entonces toda la dinámica operacional abstracta o semiabstracta si no encuentra para su aplicación los entes ya depurados con los que se le adiestró.

Es axioma de la moderna educación que el educador debe analizar sus propios procesos de aprendizaje para tenerlos en cuenta al guiar el de sus alumnos. Pues bien, yo me di cuenta por primera vez del vacío creado por la enseñanza matemática tradicional al comprobar las dificultades de planteamiento que encontraba en el estudio de los fenómenos de la técnica del ingeniero. Analizando tales dificultades comprendí que procedían del hábito de razonar sobre entes demasiado perfectos y que difícilmente podía encajar en el complejo cuadro que la técnica me ofrecía. Para una ta adaptación precisaba atrevidas simplificaciones y una cierta intuición aprio rística de su posibilidad dentro del margen de aproximaciones que ta técnica permitía. Comprobé que todo mi bagaje de cálculo y de ecuacione diferenciales me servían de muy poco para la labor de planteamiento cuando no me estorbaban induciéndome a la consideración de sutileza innecesarias.

Toda la educación matemática de que me ufanaba no me había ense ñado a efectuar procesos eficientes de abstracción, de selección de causa predominantes, en los que juega más la intuición que la lógica. Y no s escuden los profesores puristas en que ésta es tarea de educación tecnoló gica posterior. Existe una cuestión de «hábito» que es preciso educar desd el principio, sin que con ello pretendamos los profesores de matemáticas invadir el campo específico de tales tecnologías. Si no se educa este hábito desde un principio, difícilmente el alumno podrá construir por sí mismo esquemas lógicos con buen sentido de aplicación, y aun los que se le presenten aparecerán ante su sentido crítico, exigente de pureza, como artificios que ha de admitir sin convicción. La técnica necesita fundamentalmente el cultivo de estas facultades esquematizadoras, y no ejercitarlas desde un principio entre los alumnos de nuestras escuelas superiores es incapacitar a quienes en ellas se forman para toda labor posterior de auténtica creación.

Y al ver esto claro en mi aprendizaje como técnico, aprendizaje que simultaneaba con mis primeros años de ejercicio como profesor de Matemáticas de Instituto, comprendí que este fallo era general en toda la educación matemática elemental y tal vez uno de los importantes factores contribuyentes a la general aversión de la juventud hacia el estudio de las Matemáticas; su desconexión con la realidad, en este caso, naturalmente, la realidad infantil; su apartamiento del mundo de sus intereses concretos, intereses que no coinciden con los primarios vitales del adulto, como algunas escuelas han preconizado; su desconocimiento del mundo de sus percepciones sensibles y de sus actuaciones, con las que juega y aprende a un tiempo inconscientemente.

SOBRE LO CONCRETO Y LO ABSTRACTO

Lo concreto empieza siendo para el niño lo que percibe. Sobre estas percepciones primeras actúa elaborando analogías de las que surgen conceptos más generales, más abstractos, llegando a veces a procesos de abstracción de rapidez insospechada.

La percepción y la acción parecen constituir el binomio sobre el que se desarrolla el aprendizaje matemático. Con su doble juego el niño, y también el adulto (niño, al fin, en tanto aprende), elabora conceptos y relaciones válidas para clases de entes cada vez más generales. Y si en un principio la base concreta parte de las percepciones sobre el mundo físico, los estratos siguientes de elaboración generalizadora parten ya de las primeras idealizaciones, que si representaron abstracciones resultantes de los primeros procesos son luego a su vez base concreta sobre la que se apoyan los procesos ulteriores.

De aquí se infiere que lo concreto y lo abstracto no son términos absolutos, sino relativos, en función del salto de cada estrato al siguiente. De aquí también que podamos hablar de percepción en un sentido no sólo sensorial, sino también intelectivo. La percepción intelectiva sería así como el alumbramiento de las tomas de conciencia de los sucesivos estratos de abstracción. Y lo virtual, que es muchas veces la esencia del pensamiento matemático, pasa a ser, a los efectos de concreción consciente, tan real para el matemático puro como pueda serlo para el físico el mundo experimental.

En los procesos matemáticos de abstracción ha desempeñado un papel decisivo la simbolización. Es la condensación simbólica y la formalización del razonamiento matemático lo que ha hecho posible la rápida y formidable progresión de abstracciones y generalizaciones crecientes que constituyen la Matemática desde Vieta hasta nuestros días. Expresados los conceptos mediante símbolos y traducidas las relaciones que los ligan mediante leyes formales entre los mismos, puede descansar la mente matemática de los contenidos y operar sobre las simbolizaciones. De su combinación surgen entonces conceptos nuevos que se expresan mediante nuevos símbolos, unidos por nuevas leyes, y así sucesiva e indefinidamente.

La forma en Matemáticas ha ido de este modo adquiriendo tal preponderancia que al fin, la ley formal operante, ha terminado teniendo más fuerza que los propios conceptos operados. Empezó anticipándose a ellos en el Renacimiento con la resolución ciega de ecuaciones cúbicas mediante radicales imaginarios, cuando éstos carecían de todo sentido matemático, y ha terminado dejando reducidos los entes matemáticos a meros ropajes concretos con los que pueden revestirse las estructuras. Pero cada estructura, no deja de ser, a su vez, un nuevo concepto, base de ulteriores especulaciones dentro de un cuadro de superestructuras más amplias. El Algebra de Boole, que admite ropajes concretos tan diversos como las clases, las proposiciones, los conjuntos, los circuitos de interruptores y de conmutadores, conexiones de válvulas de vacío en las máquinas electrónicas de cálculo, no pasa de ser a su vez un ejemplo muy singular dentro de las familias más generales de estructuras algebraicas con doble ley de composición.

La Matemática, que empezó desnudando al mundo físico de sus atributos sensoriales para edificar sus primeros contenidos matemáticos conceptuales (número, espacio euclídeo, medida, etc.), ha terminado desnudándose a sí misma de estos contenidos y quedándose en las simples estructuras pragmáticas que los relacionan. Pero este proceso de generalizaciones y de abstracciones no se sabe a ciencia cierta cuándo empezó ni cuándo terminará... Sólo sabemos que el mundo físico y social, que paralelamente evoluciona, estimula de tanto en tanto estos procesos, sugiriendo conceptos abstractos nuevos, que el matemático se afana luego en depurar y en combinar para la creación de nuevos conceptos derivados, y que también este mismo mundo físico se beneficia posteriormente de las creaciones abstractas puras, hallando para ellas nuevas e insospechadas adaptaciones. (Para no citar más que un ejemplo, recuérdese la misma Algebra de Boole antes citada.)

Ningún profesor de Matemáticas debe olvidar esta monumental e interminable simbiosis con la que mutuamente se alimentan la matemática y la filosofía natural. Con ello, no sólo podrá vivificar los conceptos matemáticos puros proyectándolos sobre la realidad física, sino que sabrá buscar en ésta los trampolines para nuevos saltos de elaboración abstracta.

EL PAPEL DEL MATERIAL DIDÁCTICO EN LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA

Nuestra XI Reunión tiene como finalidad el estudio del material moderno de enseñanza matemática. Este material: modelos, films, filminas, visto por los matemáticos situados desde la elevada perspectiva abstracta, son meras concresiones ilustradoras, simple ropaje conveniente para facilitar, momentáneamente, compresiones dificultosas; pero, para el educador matemático que no pierda la perspectiva de los procesos iniciales de abstracción, este material es mucho más; representa algo sustancial en su función educativa. Este material estructurado en forma de modelos tiene no sólo la función de traducir ocasionalmente ideas matemáticas, sino también la de originarlas, de sugerirlas.

Hemos de estudiar la manera más acertada, pedagógicamente, de conseguirlo, y también los materiales más dúctiles para su realización. Pero, puesto que la percepción y la acción son fundamentales en toda educación matemática, hemos de conseguir también que los modelos sean capaces de provocar una y otra, de modo que traduzcan o sugieran creando situaciones activas de aprendizaje. Para ello habrá que ir sustituyendo los clásicos modelos de vitrina, de contemplación pasiva, por modelos multivalentes de nueva concepción, manipulados por el propio alumno, y determinantes de una actividad sugeridora del conocimiento que se trata de inculcar. La vida misma, un simple juguete, nos lo ofrece a veces insospechadamente. Y tanto mejor si esta actividad se manifiesta en la creación de nuevos modelos ideados por el propio alumno, ya que así no sólo ejercitará la concreción de la idea matemática a ilustrar o traducir, sino que también, al presentar su modelo a sus compañeros, tendrá que pensar en que sea capaz de sugerir en ellos la abstracción de la que él partió. Véase por dónde la confección de modelos puede ser vehículo natural y eficiente para la práctica feliz de las dos actividades de abstracción y concreción que, como he dicho tantas veces, forman parte de la integral actividad matemática educativa.

§ 2. GENERALIDADES SOBRE LOS MODELOS [1]

SU SIGNIFICACIÓN EN LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA

En el artículo anterior hemos dicho que los adjetivos «concreto» y «abstracto» tienen un valor más relativo que absoluto y que los conceptos matemáticos se ordenan según jerarquías de abstracción creciente y concreción decreciente, de tal modo que un concepto puede ser a la vez abstracto con respecto a los que le preceden en la escala, y concreto con respecto a los que le siguen. Pues bien, de acuerdo con esto, y desde un amplio punto de vista, «modelo» en Matemáticas es toda particularización de una idea más general, toda interpretación concreta de un concepto más abstracto. Todo modelo supone, pues, un descenso en los planos jerárquicos de abstracción aludidos. Así decimos, por ejemplo, que el conjunto de los números enteros en un «modelo» de *anillo* conmutativo; que los múltiplos de un número entero constituyen un «modelo» de *ideal* dentro de aquel anillo; que el espacio interior a un elipsoide y las transformaciones proyectivas que dejan invariante dicha cuádrica constituyen un «modelo» de espacio no-euclídeo y de geometría hiperbólica.

En lo que sigue no nos referiremos a un concepto de «modelo» tan general, cuyo estudio nos llevaría demasiado lejos. Teniendo en cuenta que el primer eslabón concreto, del que parte el niño para empezar a edificar sus abstracciones, es el mundo visible y tangible, nos referiremos a «modelos» tomados del mundo material o realizados en él, bien sea con objeto

[1] Resumen de las ideas esenciales del artículo del autor titulado «Modéles prêts et modéles faits», publicado junto a otros por la Comisión internacional para el estudio y mejora de la enseñanza matemática en el libro *Le Matérial pour l'Enseignement des Mathématiques* (Ed. Delachaux-Niestlé, París, Neuchatel).

de interpretar conceptos matemáticos o, lo que es mejor, de lograr que el modelo los sugiera. En resumen, entenderemos aquí por «modelo matemático» todo material capaz de *traducir* o de *sugerir* ideas matemáticas.

Ahora bien, concebida la enseñanza como guía de aprendizaje, en el que la acción desempeña tan importante papel como la percepción, habrá que procurar que los modelos provoquen una y otra de tal modo que las interpretaciones o sugerencias de que son portadores no sean meramente contemplativas, sino que despierten la actividad necesaria en el acto de aprender. En otros términos, los modelos deberán *traducir* o *sugerir*, creando además *situaciones activas* de aprendizaje.

CARACTERÍSTICAS DEL MATERIAL MODERNO. DINANISMO Y MULTIVALENCIA

La actividad del alumno ante los modelos confeccionados *estáticos*, se desarrolla principalmente en el sentido de abstraer de varios de ellos el contenido matemático subyacente común, lo que exige una multiplicidad de modelos. En cambio, un modelo *dinámico* lleva en sí mismo la multiplicidad de sus configuraciones y la génesis de los conceptos matemáticos derivados de los caracteres que permanecen invariantes durante su transformación, especialmente si ésta puede efectuarse de modo continuo. De aquí la gran ventaja de los modelos dinámicos sobre los estáticos para sugerir conceptos matemáticos y para ejercitar la actividad de *abstracción*.

Pero si proponemos al alumno la traducción de tales conceptos en nuevos modelos, la creación y la realización de ellos pondrá en juego la actividad inversa de «*concreción*», tan interesante como aquélla. Esta actividad creadora del alumno se favorecerá grandemente si se le suministra material *multivalente* adecuado, es decir, elementos constructivos capaces de servir para múltiples realizaciones (varillas, articulaciones, fichas, mosaicos, bloques, barras, regletas, gomas, plastilina, etc.). Este material tiene además la ventaja de prestarse al juego libre como puro y simple deseo de expansión activa, con lo que muchas veces termina asignándose dicha actividad un fin intelectual que suele ir de lo estético a lo matemático. La lección experimental que sobre progresiones aritméticas de orden superior describimos en el capítulo siguiente tuvo su origen en una actividad de esta índole: formación de pirámides con regletas de colores varios; actividad que, conducida inicialmente por valores puramente plásticos, terminó sugiriendo una multitud de relaciones matemáticas contenidas en la teoría de tales progresiones aritméticas de orden superior.

VENTAJAS DE LA CREACIÓN Y DE LA REALIZACIÓN DE MODELOS SOBRE SU SIMPLE UTILIZACIÓN

Los modelos así realizados no sólo cultivarán la actividad de «concreción» o traducción de ideas matemáticas en el alumno que los ha creado a tal fin, sino también la actividad de abstracción o de sugerencia de tales ideas en los que hayan de contemplarlos o manejarlos después. Si el alumno creador del modelo se sitúa, pues, desde el primer momento, en este doble punto de vista, es decir, pensando que el modelo tendrá que sugerir luego su propia idea a los demás, practicará a un tiempo las dos facultades de abstracción y de concreción que tantas veces hemos ponderado como esenciales en una formación matemática completa.

Así, por ejemplo, el simple y vulgar hecho de dibujar un triángulo en el encerado para ilustrar un razonamiento *general para todos los triángulos,* obliga a presentar un modelo de triángulo que no tenga propiedades especiales que sugieran generalizaciones falsas. ¡ Cuántos errores de razonamiento se deben al hecho de haber creado en la figura dibujada un modelo inconveniente para su ilustración, por llevar implícitamente caracteres no especificados en las hipótesis ! No incurriríamos en tales errores, ni haríamos que los demás incurrieran en ellos, si, al crear el modelo traduciendo o concretando una idea abstracta, pensáramos que hay que utilizarlo inmediatamente como sugeridor de propiedades no particulares de dicho modelo, sino genéricas de todos los análogos, es decir, propiedades asimismo abstractas.

Esta sola consideración realza la ventaja de la creación de modelos sobre el simple uso, ventaja que no se obtendrá sin la contrapartida de algún inconveniente, como es el del tiempo consumido en los detalles de su confección y acabado. Desde un enfoque, estrictamente matemático, es preferible, en este aspecto, cuidar las ideas sobre los detalles, sin que ello signifique que sean despreciables, ni mucho menos, los factores educativos que en otro orden de ideas (educación del gusto, de la destreza manual, etcétera), puedan obtenerse de la perfección en el acabado. Este segundo aspecto de la cuestión resulta particularmente interesante en las enseñanzas de carácter mixto formativo-profesional. La ponderación entre uno y otro aspecto dependerá, en definitiva, del carácter que prepondere en la enseñanza.

Sea como fuere, no cabe duda de que la realización de modelos con elementos de material multivalente favorecerá notablemente una y otra finalidad, permitiendo al alumno un considerable ahorro de tiempo y la posibilidad de favorecer la facultad creadora, sin mengua de la realizadora que resulta así mucho más rápida.

MODELOS CREADOS BAJO CONDICIONES. APRENDIZAJE DE PROYECTOS

La realización de modelos permitirá además al alumno ejercitarse tempranamente en la creación técnica. Todo proyecto técnico supone la creación y realización de una estructura (máquina, construcción, instalación) destinada a cumplir determinadas funciones. Estas imponen ciertas condiciones que las leyes físicas suelen traducir en ecuaciones matemáticas, dando lugar a cálculos que determinan los elementos característicos de la estructura proyectada.

En la modesta esfera que le corresponde, un alumno de enseñanza media puede también realizar modelos sujetos a determinadas condiciones que basten para determinar indirectamente sus dimensiones. Así, en Geometria del Espacio, en lugar de proponer a un alumno que realice en cartón un modelo cilíndrico o cónico de dimensiones dadas, será preferible proponerle la construcción, a escala conveniente, de la maqueta de un depósito cilíndrico o cónico de capacidad dada y del que se conozca además una dimensión (por ejemplo, la altura) impuesta por condiciones de emplazamiento. Más tarde, cuando el alumno, iniciado en los métodos del cálculo diferencial, sepa resolver problemas de máximos y mínimos, puede proponérsele la construcción de modelos de proyectos que obedezcan a determinadas condiciones económicas: gasto mínimo de material para una capacidad dada, volumen máximo para una área dada, o bien para un desarrollo recortable de una placa prefijada, etc.

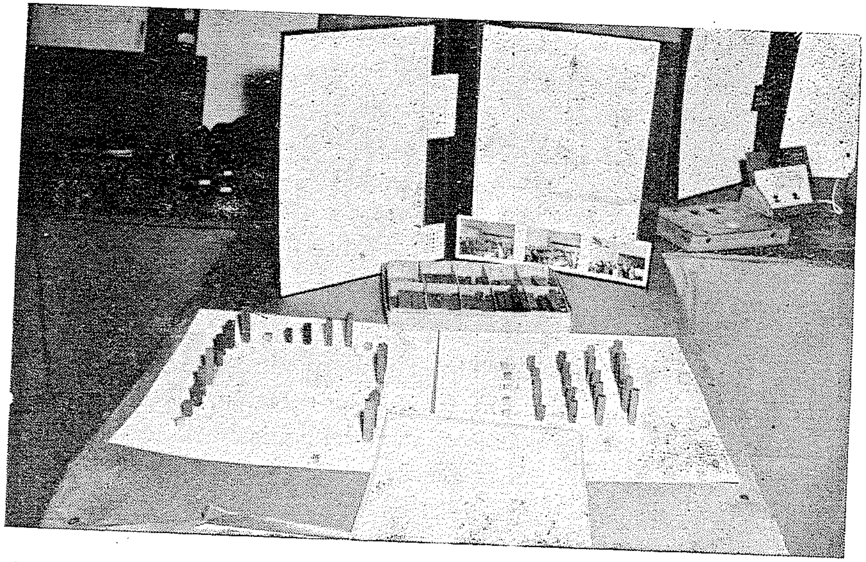
Al calcular y realizar así sus proyectos y maquetas, los alumnos jugarán a ser anticipadamente ingenieros. Su interés por los problemas que realizan aumentará considerablemente, beneficiándose con ello la calidad de su trabajo, ya que los cálculos que para ello desarrollan no tienen por meta la obtención de unos resultados numéricos que les dejan indiferentes, sino de las dimensiones que necesitan para llevar a término una realización tangible efectiva.

§ 3. ALGUNOS EJEMPLOS DE MATERIAL DINAMICO MULTIVALENTE

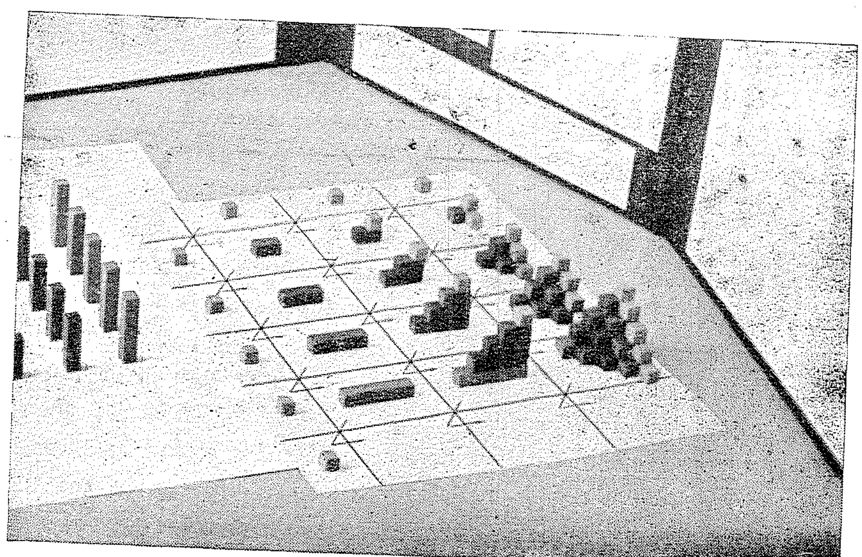
No es nuestro propósito describir en este artículo los múltiples materiales utilizables para la confección de modelos: cartón, cartulina, tablex, plexiglás y otros materiales plásticos, alambre, agujas metálicas, plastilina, cola, bandas adhesivas, etc., ni la técnica de tal construcción con el manejo de utensilios adecuados a este fin. Nos limitaremos a recomendar al lector interesado en tal fabricación, la lectura de los artículos destinados a dicho tema en la obra *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques*, ya citada con anterioridad, publicada por la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas (Edit. Delachaux-Niestlé, Neuchatel-Paris), y especialmente el interesante artículo del profesor J. W. Peskett, «Méthodes de fabrication de modèles et matériaux nécéssaires», que constituye el capítulo X de dicho libro.

Aunque más adelante nos hemos de referir a los modelos matemáticos que nos ofrecen los objetos que nos rodean en la vida diaria, solamente citaré aquí, al paso, algunos elementos aprovechables como material multivalente para la construcción de modelos dinámicos diversos: tubos de cartón, botes de hojalata, cajas circulares, anillas, aros, bobinas de cintas de máquinas de escribir, carretes de hilos, depósitos cilíndricos de material plástico de lápices y plumas estilográficas, carpetas, agujas de tricotar, pinzas y ojetes metálicos, varillajes de paraguas viejos, material eléctrico vario que oportunamente detallaremos, etc. De todos estos elementos hemos hecho amplio uso en los modelos y lecciones que describimos en el capítulo siguiente.

Quisiéramos en este artículo referirnos tan solo a unos contados materiales, cuya eficacia y multivalencia está plenamente demostrada en la enseñanza de la Aritmética y de la Geometría.



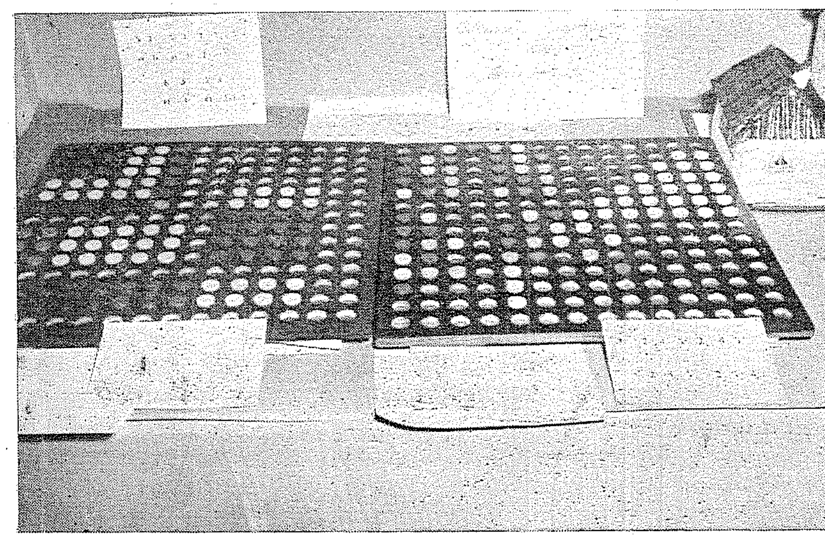
Utilización de las regletas de Cuisenaire en la enseñanza de las congruencias



Estructuras con regletas para ilustrar progresiones aritméticas de orden superior

REGLETAS

Ya hemos visto en el capítulo anterior todas las posibilidades de las regletas coloreadas de Cuisenaire en la enseñanza moderna de la Aritmética. Este material constituye por sí solo uno de los ejemplos más significativos de los caracteres de multivalencia y activismo exigibles a todo material didáctico moderno. Hemos descrito cómo invita a la acción, sugi-

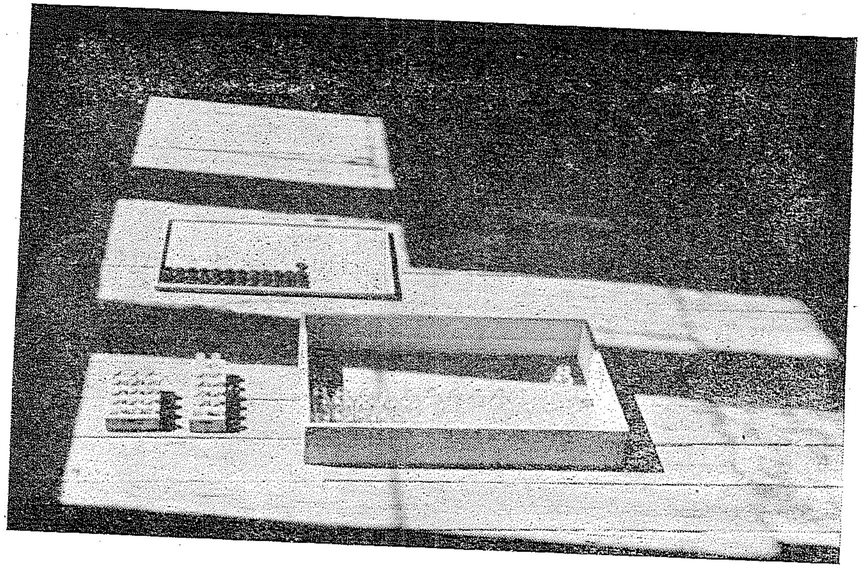


Material de fichas coloreadas de las Escuelas del Sagrado Corazón, de Valladolid

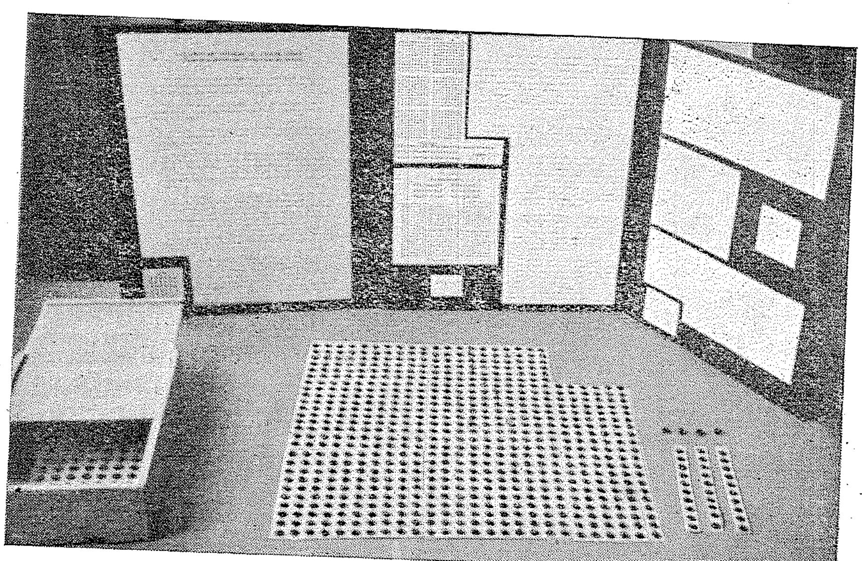
riendo, a través de ella, el dinamismo aritmético y algebraico. Pero también ciertos temas de Geometría, de cálculo combinatorio y de progresiones, son abordables con dicho material; lo que constituye prueba palpable de su mencionada multivalencia. Para más detalles puede consultar el lector el artículo del profesor Gattegno, «Les matériels multivalents», que constituye el capítulo XII del libro antes citado. Vean además la lección 9 del capítulo siguiente.

FICHAS, BOTELLINES, ETC.

Para una enseñanza de la Aritmética concebida más a la manera clásica, es decir, como dinámica de relaciones entre conjuntos de unidades separa-



Fichas y botellines ilustrando las nociones de números primo y compuesto



Cartones con cierres automáticos ilustrando la estructura operatoria de la raíz cuadrada

das, un material adecuado lo constituyen las fichas circ en los juegos, especialmente si son coloreadas en varios tonos distinguir los conjuntos unos de otros. La Rvda. Madre Dolore. Juniorado de las Escuelas del Sagrado Corazón, de Valladolid, ha interesantes muestras del uso de este material en la Revista «Ensen. Media», número 33-36, material que expuso asimismo en la Exposición c Madrid en 1957.

Pero el comercio mismo suministra conjuntos ya agrupados (botones, automáticos, alfileres, botellines, etc.), de cuyas agrupaciones puede obtenerse provecho en distintos temas de enseñanza. Así, por ejemplo, la actividad de encajonar un cierto número de botellines en disposición rectangular, sugiere la distinción entre número primo y número compuesto, y aun la técnica para su discriminación.

La disposición en grupos de los cierres automáticos de ciertas marcas nos ha brindado eficaz oportunidad para iniciar a los alumnos en la técnica de la descomposición en factores [1]. Finalmente, la agrupación de estos mismos elementos en tiras de diez, y cartones cuadrados de cien, permite desarrollar a través de una actividad geométrica la estructura de la regla de la raíz cuadrada (ver la lección que se describe en el capítulo siguiente).

VARILLAS ENGARZADAS Y ARTICULADAS

Pasando al campo de la Geometría, las varillas de distintos tamaños, acompañadas de dispositivos convenientes para su engarce y su articulación, constituyen el material multivalente más adecuado para la construcción de polígonos y poliedros, para la ilustración de sus propiedades y aun para materializar transformaciones geométricas diversas.

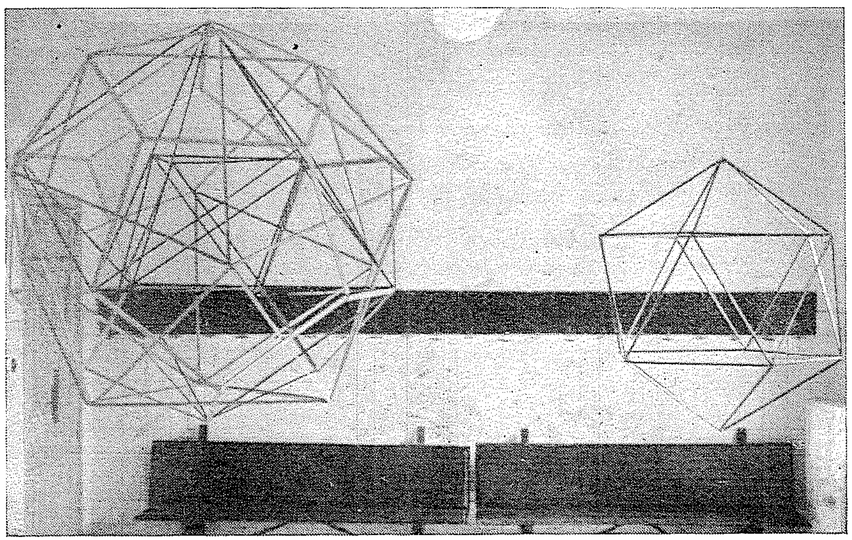
Así, por ejemplo, con treinta varillas de madera, iguales, terminadas con hembrillas circulares que permitan atarlas de cinco en cinco, concurrentes en un mismo vértice, y encadenarlas tres a tres en cada cara, formaremos rápidamente un icosaedro regular desmontable.

La construcción de este modelo surgió de un comentario en clase, después de haber aparecido destrozados antiguos modelos de dodecaedro y cubo regulares (construídos con varillas metálicas soldadas) mientras el tetraedro, octaedro e icosaedro, de la misma colección, se conservaban en

[1] Véase P. Puig Adam: «Didáctica Matemática Eurística», lección sobre descomposición en factores primos.

buen estado. La diferencia de resistencia, no debida al azar sino a la rigidez estática del triángulo, originó una alusión instructiva a las estructuras reticuladas triangulares corrientes en la técnica (puentes, postes, etcétera). Y, en efecto, los alumnos comprobaron la rigidez del icosaedro como estructura triangular, obtenida como hemos dicho, sin necesidad de soldar los vértices, sino de atarlos simplemente.

En cambio, un dodecaedro construído de análoga manera carece de rigidez. Para dársela hubo que sostenerle mediante un icosaedro formado por

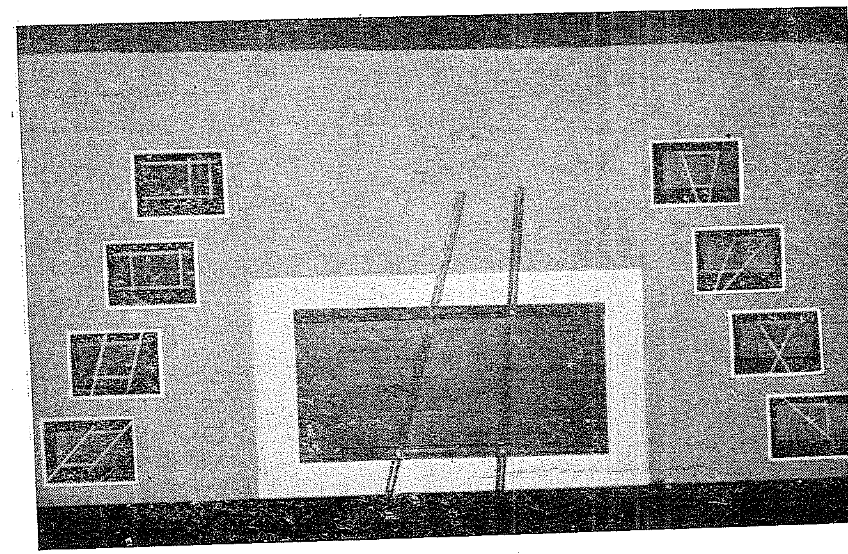


El omnipoliedro regular construído en el Instituto de San Isidro

aristas que cruzaran ortogonalmente las del dodecaedro en sus puntos medios. Es fácil obtener la relación entre las aristas de uno y otro poliedro: la arista del dodecaedro es la sección áurea de la del icosaedro cruzado.

Para obtener análogamente un cubo rígido bastará insertar en sus caras las seis diagonales formando las aristas de un tetraedro regular inscrito en él. Si se inscribe un cubo en el dodecaedro antes formado (sostenido por el icosaedro correspondiente), en el cubo un tetraedro, como hemos dicho, y en este tetraedro el octaedro regular cuyos vértices son los seis puntos medios de sus aristas (es decir, los centros de las caras del cubo), obtendremo un modelo rígido desmontable de los cinco poliedros regulares sosteniéndose mutuamente y que pueden destacarse entre sí pintando sus aristas de colores bien diferenciados. Las longitudes de estas aristas están en la relación: cubo, 1; tetraedro, $\sqrt{2}$; octaedro, $\sqrt{2}/2$; dodecaedro $(\sqrt{5}-1)/2$; icosaedro, 1. Este modelo fue bautizado con el nombre de «omnipoliedro regular» por los propios alumnos que lo construyeron, en el Instituto de San Isidro.

Quede consignado lo anterior como un ejemplo vivido de cómo el material multivalente de varillas permite la rápida construcción de un modelo,

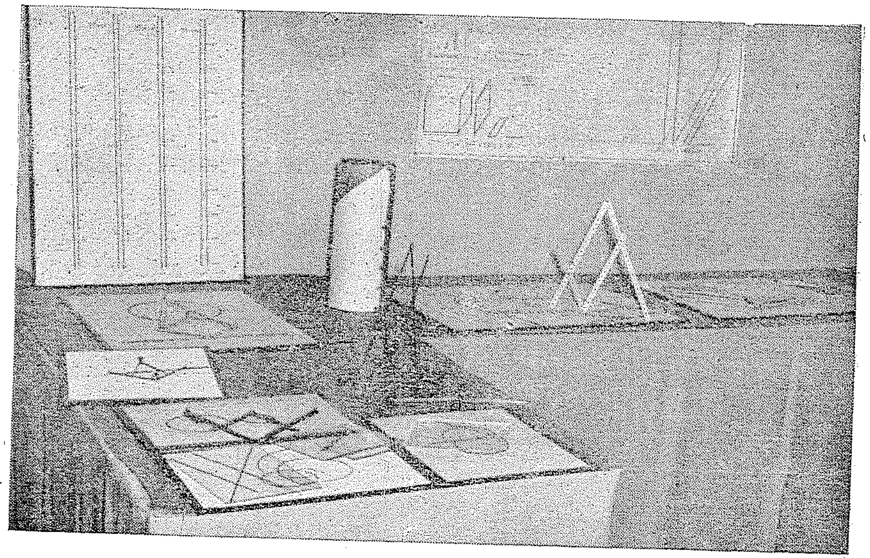


Construcción dinámica de cuadriláteros con varillas articuladas y deslizantes (material belga)

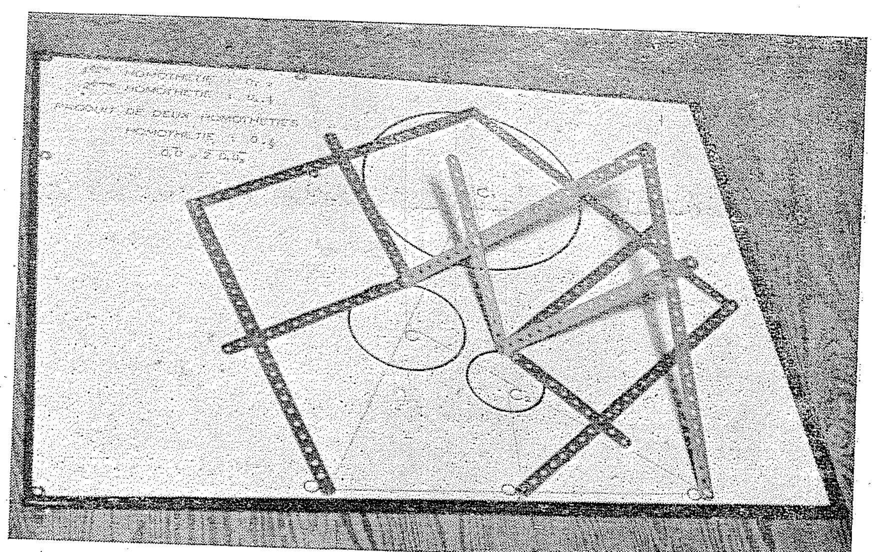
y cómo esta construcción puede surgir del comentario a un hecho ocasional de la misma vida escolar. La citada Rvda. Madre Puig, de Valladolid, ha realizado con sus alumnas construcciones análogas de modelos de poliedros regulares estrellados [2].

Cuando los sistemas no son rígidos se obtienen estructuras deformables con ciertos grados de libertad. Condicionando éstos convenientemente (fijación de determinados elementos, deslizamiento de otros, etc.), pueden establecerse relaciones de posición entre los vértices variables del sistema

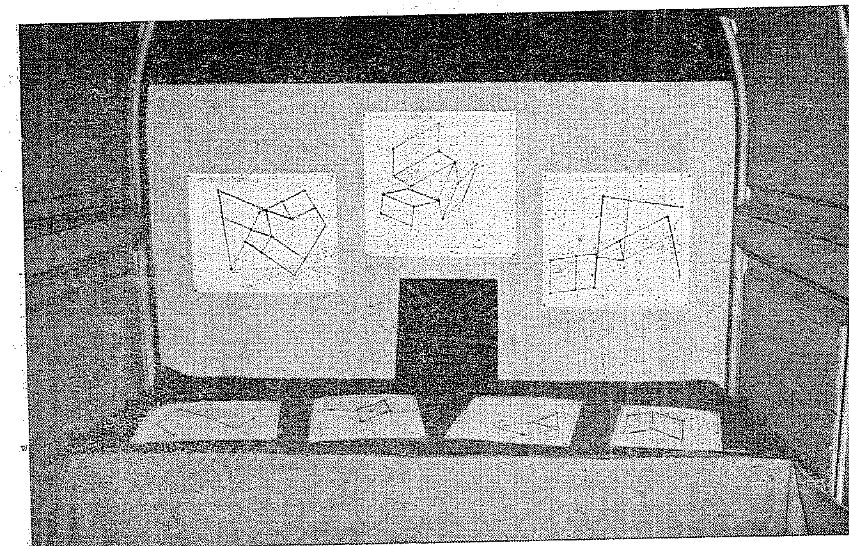
[2] Véase Revista «Enseñanza Media», núms. 29-32.



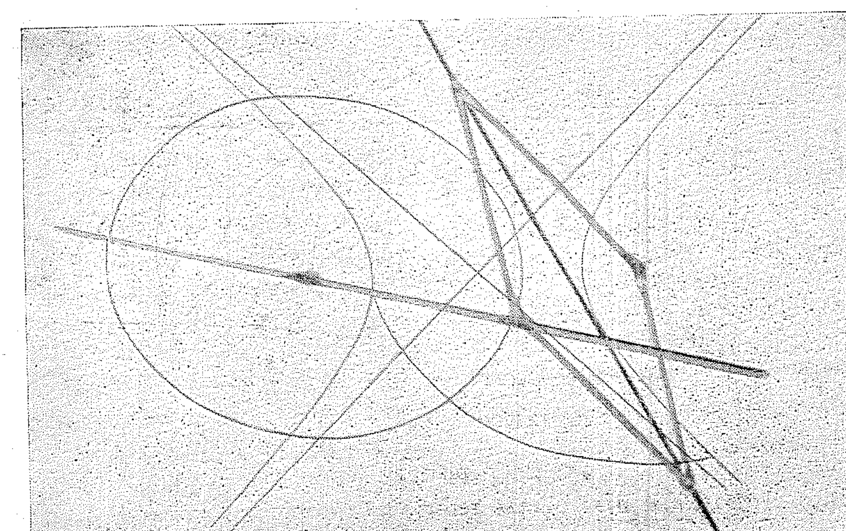
El material de varillas articuladas del profesor Biguenet (Francia)



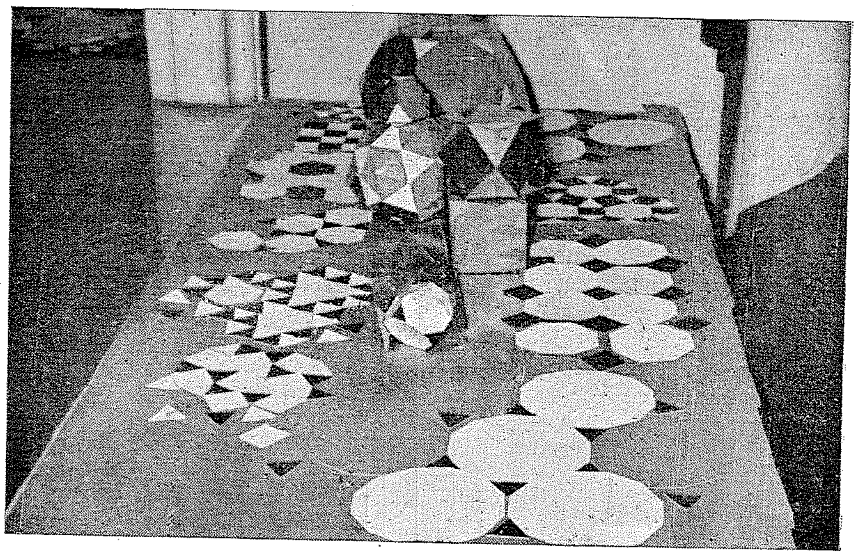
Detalle de uno de los modelos del profesor Biguenet: el que realiza el producto de dos homotecias



Modelos dinámicos articulados para ilustrar transformaciones geométricas varias: traslaciones, giros, semejanzas, homotecias y sus productos (Bosteels-Bélgica)



Generación puntual y tangencial de la hipérbola (sistema de deslizamiento y articulación (Servais-Bélgica) que traduzcan transformaciones geométricas conocidas. El profesor francés Biguenet y el belga Bosteels, han hecho amplio uso de estos sistemas articulados para ilustrar transformaciones geométricas en el plano y sus productos: traslaciones, giros, homotecias, semejanzas, inversiones, polaridad respecto al círculo...



Mosaicos varios obtenidos con polígonos regulares (profesora Carleer-Bélgica)

Como ejemplo típico de material geométrico multivalente, encuadrable dentro de este párrafo, citaremos, por último, el famoso juguete meccano de cuyos elementos se ha valido precisamente el profesor Biguenet para sus realizaciones [3].

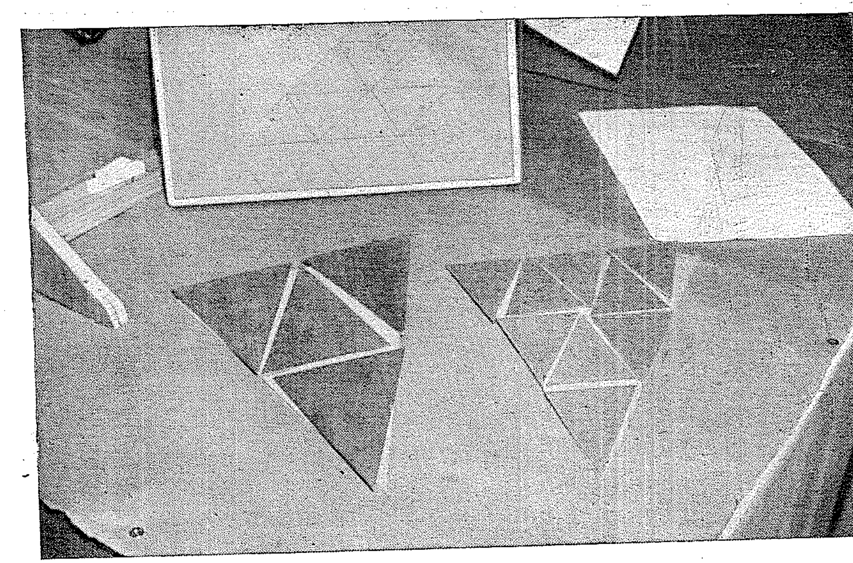
MOSAICOS Y PUZZLES GEOMÉTRICOS

En el dominio de la extensión plana es también del máximo interés didáctico el uso de figuras planas recortadas, acoplables entre sí, o en sus

[3] No queremos cerrar este párrafo sin mencionar el vistoso material de varillas articuladas de plástico presentado en la referida Exposición por el profesor del Instituto Laboral de Ayamonte, don Juan Fernández.

huecos correspondientes; las distintas actividades de ajuste, acoplamiento, formación de mosaicos, etc., que motivan, permiten sugerir variados conceptos matemáticos.

Como veremos en el próximo capítulo, las distintas formas de ajuste de tales figuras en sus huecos, puede servir como punto de partida para establecer los conceptos de simetría en el plano. El acoplamiento en mosaico de cuadriláteros irregulares iguales puede relacionarse con el valor de la



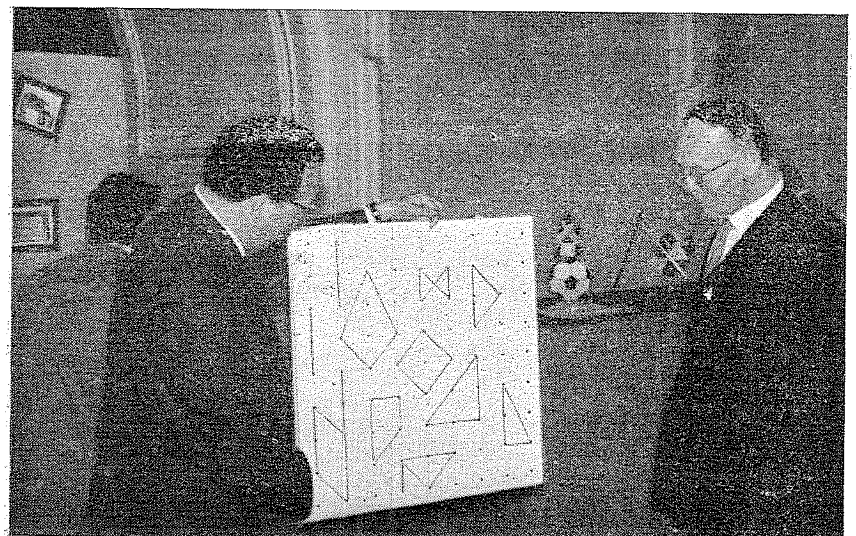
El material del profesor Pascual Ibarra, de Valladolid, para la iniciación a la semejanza de triángulos

suma de sus ángulos y también con las simetrías alrededor de los puntos medios de sus lados. Los mosaicos formados de triángulos escalenos permitirán no sólo el descubrimiento de sus relaciones angulares, sino también la génesis de triángulos semejantes y sus propiedades [4]. Finalmente, el juego de mosaicos llamado *rombo* nos sugirió una bonita e inesperada lección sobre irracionales cuadráticos que describiremos en seguida.

[4] Véase la lección y el material del profesor PASCUAL IBARRA descrita en Revista «Enseñanza Media», núm. 11.

EL GEOPLANO

Para la construcción rápida de los más variados modelos de figuras planas, formadas por rectas y segmentos, es de gran eficacia didáctica la utilización de gomas coloreadas, tendidas entre los clavos de una red dispuesta sobre una tabla plana. Tal es el fundamento de los llamados «geoplanos» del profesor Gattegno. Con una simple red cuadriculada de 5 por 5

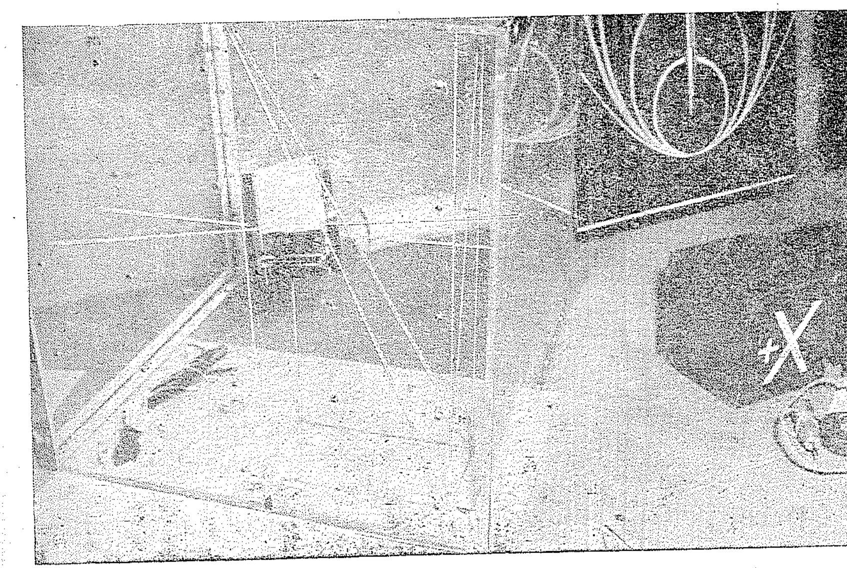


Figuras realizadas con gomas en un geoplano del profesor Gattegno

clavos (7 por 7 ó 9 por 9) puede realizarse gran variedad de figuras geométricas planas, con las siguientes ventajas sobre el encerado: 1.ª, la rapidez en la formación, transformación y anulación de las figuras, y 2.ª, la muy importante ventaja de la movilidad del geoplano y, por consiguiente, de las figuras en él construídas. Presentando cada figura en posiciones diversas del geoplano, se habitúa el niño a percibirla desde distintos ángulos visuales y a reconocerla independientemente de su posición, lo que no suele ocurrir con el encerado. Todos los profesores hemos observado la dificultad de los niños en reconocer, por ejemplo, un rombo cuyas diagonales no sean precisamente horizontal y vertical, como lo ha visto tradicionalmente

dibujado en el encerado y en los libros, y asimismo la dificultad de reconocer un trapecio cuyos lados paralelos sean, por ejemplo, verticales.

Si cada alumno, o pequeño grupo de ellos, dispone de un geoplano, la actividad en la construcción de estas figuras despertará el interés en la averiguación de sus propiedades. Para los polígonos regulares y las propiedades relativas al círculo, se utilizan geoplanos con distribución circular de



Detalle del geoespacio de Pescarini

clavos *ad hoc*. Las posibilidades de este material se hallan descritas en distintos artículos y en especial en el antes citado *Les matériels multivalents* del propio profesor Gattegno (v. «Le matériel pour l'enseignement des mathématiques», Delachaux-Niestlé, pág. 191).

GEOESPACIOS

Ampliaciones al espacio de la idea del geoplano han sido realizadas por los profesores Pescarini (Italia), Schiavone (Uruguay) y el autor de estas líneas.

Las figuras espaciales se materializan por sus aristas realizadas mediante gomas o cordeles tendidos entre puntos (orificios, ganchos...) distribuidos en las paredes de un recinto espacial (geoespacio).

La principal dificultad a resolver aquí es la de la visibilidad de la figura a través de las paredes del recinto que la contiene.

Pescarini resuelve la cuestión construyendo dichas paredes de plástico transparente, lo que encarece el modelo. Nosotros hemos preferido hacer uso de enrejados de varillas o telas metálicas, según los modelos requeridos [5].

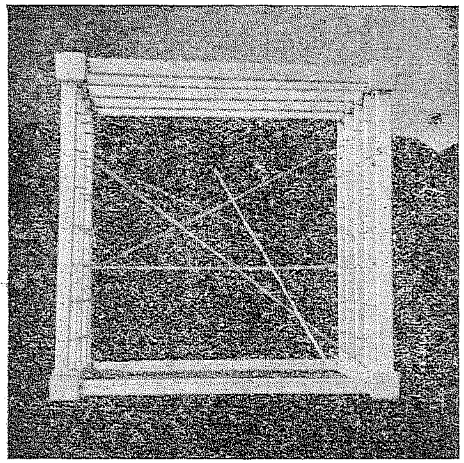


Fig. 1

Para su uso individual, cualquier alumno puede, en rigor, construirse un geoespacio disponiendo de cualquier caja de embalar de dimensiones no inferiores a 25 cm.

Suprimida una de sus caras de mayores dimensiones, con objeto de poder manipular cómodamente en su interior, atorníllense, en cada una de las otras, redes de tornillos con gancho, distribuídos uniformemente (o colocados en lugares precisos, si se quieren lograr figuras espaciales métricamente predeterminadas). Tendremos así, en toda la superficie interior de la caja, materializados, un conjunto de puntos entre los cuales podremos tender gomas elásticas o cordeles, que tan pronto tendrán la significación de rectas indefinidas, en problemas de carácter proyectivo, como representarán aristas de figuras poliédricas transparentes, aptas para estudios de carácter métrico. La variedad de modelos que así puede componer e idear el alumno, tienen la ventaja, sobre los clásicos, de poderse hacer y deshacer con suma facilidad.

Las figuras que se detallan a continuación representan varios modelos en dos cajas, una fija y otra desmontable, especialmente confeccionadas

5 Véase el artículo del autor «Un nuevo material para la enseñanza eurística de la Geometría del Espacio», publicado en Revista «Enseñanza Media», número 3, del que reproducimos la parte descriptiva.

en el modesto taller de trabajos manuales del Instituto de San Isidro [6], con listones estrechos, con objeto de conseguir una visibilidad del modelo desde cualquier punto de vista exterior a la caja. Los listones de las caras pueden sustituirse, con el mismo fin, por telas metálicas resistentes.

1. En el modelo de la figura 1 se materializaron dos planos mediante dos pares de gomas, partiendo cada par de un mismo gancho, y dispuestos en forma de que ambos planos se cortaran en el interior de la caja. Se propuso a los alumnos colocar una aguja de tricotar en la recta de intersección. Pese a su aparente trivalidad, este ejercicio da bastante juego a la intuición y a la acción de alumnos jóvenes (doce años) hasta lograr colocar la aguja en la posición debida. Difícilmente se les ocurre a los muchachos resolver el problema visualmente, es decir, colocando la vista de modo que ambos pares de gomas se confundan visualmente en sendas rectas, y más les sorprende todavía observar cómo, dejando caer simplemente la aguja en el interior del diedro superior de los formados por ambos planos, la misma gravedad se suele encargar de situarla en su posición preci-. Se pueden dar análogamente tres planos para determinar su punto de intersección, discutiendo los casos posibles. Conviene razonar el hecho de que tres pares de rectas no paralelas, coplanarias dos a dos, pero no las tres, concurren en un punto

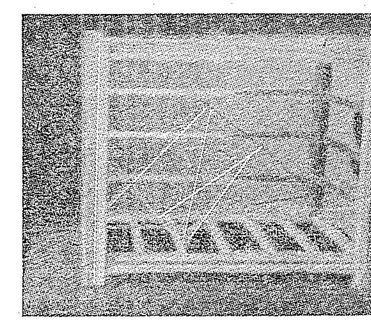


Fig. 2

2. En la figura segunda se presenta un modelo en el que se ha materializado primeramente el teorema de Desargues, en un ensayo de iniciación entre alumnos del curso preuniversitario. Los lados de los dos triángulos homológicos T_1 y T_2 (no coplanarios), izquierda y centro de la figura respectivamente, vienen materializados por ternas de gomas de distinto color cada terna, por ejemplo, los tres lados del triángulo T_1 en azul y los del otro T_2 en rojo. El eje de homología es la alineación de tornillos de un listón de la base, y las tres rectas, concurrentes en el centro de homología O_3, que unen los pares de vértices homólogos, se materializan me-

6 Es de justicia agradecer al prestigioso maestro nacional, especializado en trabajos manuales, don Mariano Fernández, la eficaz ayuda prestada en la realización de estos modelos, en la que asimismo han colaborado alumnos del Instituto.

diante tres agujas de tricotar. La adición de un tercer triángulo T_3 (amarillo, a la derecha), homológico de los anteriores con el mismo eje de homología, permite realizar el teorema de las tres homologías, comprobando la alineación de sus centros O_3 (de T_1 T_2), O_1 (de T_2 T_3), O_2 (de T_1 T_3). Situando T_3 no coplanario con T_1, ni con T_2, el tercer centro de homología O_2 puede comprobarse visualmente colocando la vista en forma de que se superpongan las imágenes de T_1 y T_3, con lo que aparecen entonces asimismo superpuestas las imágenes de O_1 y O_3; se evita así un excesivo enjambre de varillas.

Esta misma realización suministra un modelo de *dos tetraedros homológicos,* los determinados por O_3 T_1 y por T_3 O_1, cuyo plano doble de homología es el de T_2; los lados T_2 y el eje de homología de T_1 T_2 T_3 son ahora las rectas del plano doble en que se cortan los cuatro pares de caras homólogas; y el centro de homología de ambos tetraedros es el punto O_2, en que concurren los pares de vértices homólogos de T_1 y T_3, así como la recta O_3 O_1, en virtud del teorema de las tres homologías. Al colocar la vista en dicho centro de homología se perciben ambos tetraedros como dos cuadrivértices coincidentes.

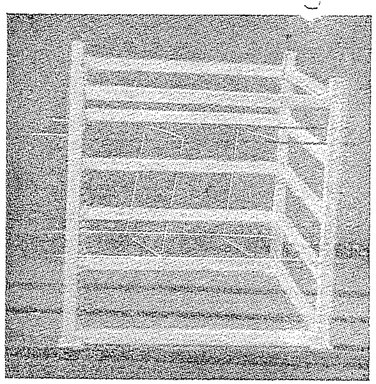


Fig. 3.ª

3. Pasando de los problemas de carácter proyectivo a los de índole métrica, la figura tercera muestra la realización de un modelo deformable de paralelepípedo, obtenido combinando varillas rígidas y gomas. El paralelepípedo comienza siendo recto y rectangular; pero por movimiento de las gomas primero, y de las varillas después, termina siendo oblicuo, de base paralelográmica. En cada deformación, los alumnos *ven* palpablemente cómo se agrega por un lado un volumen igual al que se quita por otro, conservándose en las sucesivas deformaciones (traslaciones de una cara en su plano) el volumen total del paralelepípedo y la ley que lo determina (base × altura). La supresión de una arista (varilla) reduce el paralelepípedo a un prisma triangular de volumen mitad, volumen que se obtendrá, por tanto, según la misma ley; la agregación de nuevas aristas paralelas, abrazadas

por las gomas básicas, permitirá generalizar dicha ley a prismas cuadrangulares, pentagonales, etc., por adición de prismas triangulares sucesivos. Me parece interesante consignar aquí que un alumno, ante la figura del prisma triangular recién obtenido, enunció espontáneamente esta otra regla de obtención del volumen, desconocida para él: producto del área de una cara lateral por la mitad de la distancia a la arista opuesta.

4. La figura cuarta representa la descomposición del prisma triangular en tres pirámides equivalentes, realizada mediante gomas. La movilidad

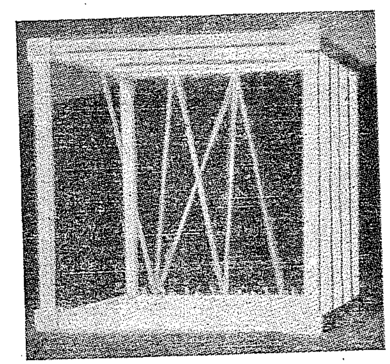


Fig. 4.ª

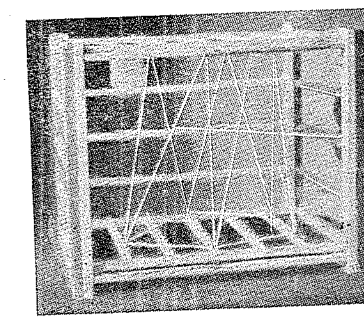


Fig 5.ª

del modelo permite variar sus posiciones para hacer más fácilmente perceptibles las pirámides parciales y su equivalencia.

5. La figura quinta presenta un modelo de prismatoide realizado con cordel continuo, de modo que ninguna arista se recorre dos veces. Las bases se sitúan en las caras inferior y superior de la caja, la sección media puede obtenerse mediante varillas o agujas apoyadas en los travesaños medios. La caja se completa entonces con la cara anterior (igual a la posterior), de quita y pon. Un punto interior a dicha sección media puede materializarse mediante la cabeza de una aguja de tricotar, completándose imaginativamente sin dificultad el razonamiento conducente a la determinación del volumen.

6. La realización del prismatoide mediante cordel resulta más rápida que la realización mediante gomas, y lo mismo ocurre con todos aquellos poliedros que tengan considerable número de aristas. Ahora bien, no todos los poliedros pueden realizarse tendiendo un cordel continuo sucesivamente

entre sus vértices, sin pasar dos veces por una misma arista; tal imposibilidad ocurre con los prismas y pirámides corrientes. ¿Cuáles podrán construirse así y cuáles no? Se trata de un problema topológico análogo al de los puentes de Königsberg, que intriga a los muchachos, dando lugar a que discurran soluciones ingeniosas. Uno de mis alumnos, por ejemplo, intrigado por mi afirmación de la imposibilidad de construir pirámides de esta suerte, urdió la solución de añadir las diagonales de la base en una pirámide cuadrangular (con lo cual hizo concurrir en todos los vértices un

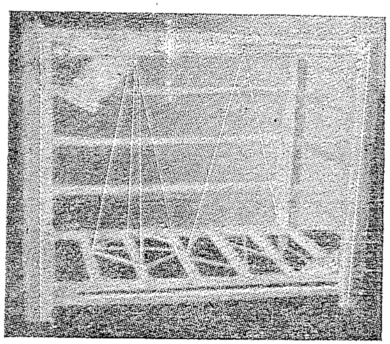


Fig. 6.ª

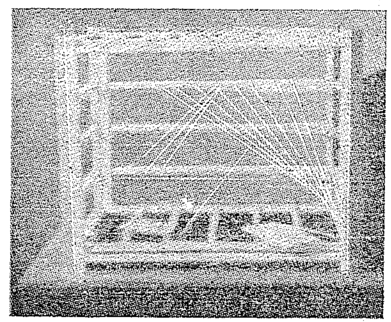


Fig. 7.ª

número par de segmentos). La réplica fue proponerle la solución con una sola diagonal. (Véase la figura 6.ª).

7. Si se varía la disposición y frecuencia de los ganchos, pueden realizarse incluso superficies regladas (figura 7.ª), curvas alabeadas como aristas de retroceso de superficies desarrollables (figura 8.ª).

8. La figura octava reproduce una variante de nuestro geoespacio, con paredes de reja metálicas que permiten una mayor densidad de generatrices; la figura contiene las tangentes a una curva alabeada, la superficie desarrollable que forman y el triedro intrínseco en un punto. Hemos construído, por último, un modelo móvil plegable, que ilustra transformaciones afines continuas.

Como se ha dicho, las figuras citadas pueden realizarse en modelos construídos por los alumnos en cajas de embalar. La inscripción en ellas de poliedros determinados por condiciones métricas y de posición, podrá dar lugar a cálculos interesantes, con aplicación, incluso, de trigonometría

esférica, al objeto de determinar previamente la posición de los vértices o puntos donde colocar los ganchos. Finalmente, forrando con cartulina continua el suelo, el fondo y una cara lateral de la caja, podremos pro-

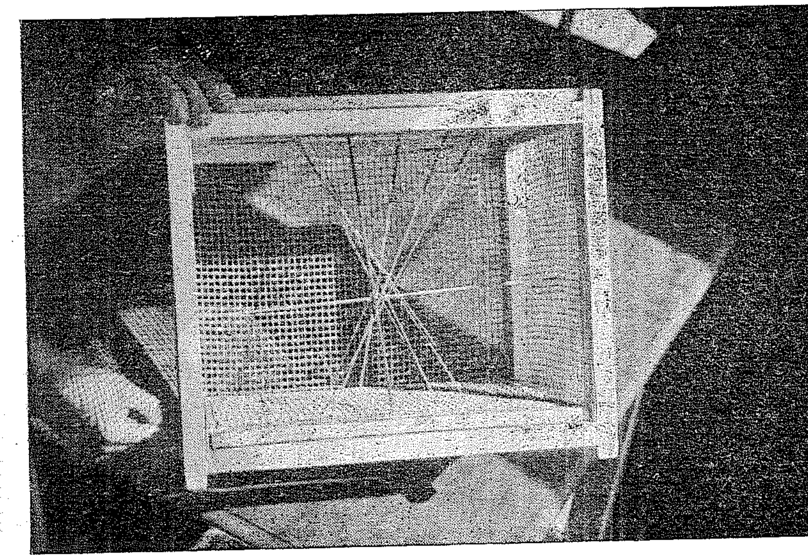


Fig. 8.ª

yectar sombras de las figuras realizadas, iluminándolas mediante lámparas de bolsillo o mediante focos lejanos más potentes, materializando así proyecciones paralelas que permitan aclarar las construcciones características de la geometría descriptiva.

§ 4. MATERIAL DIDACTICO MATEMATICO EXTRAIDO DE LA VIDA

Sin darnos cuenta de ello, vivimos rodeados de modelos matemáticos, y el hecho es natural. La técnica que nos suministra el confort está impregnada de Matemática. Los ingenieros, al proyectar, y los obreros al realizar lo proyectado, hacen constantemente uso de ella. Corresponde al profesor de Matemáticas volver a hallar el contenido matemático de las cosas que nos rodean y jugar con este contenido a efectos didácticos. He aquí una actividad, en cierto modo inversa de la del técnico, que los profesores de Matemáticas debemos ejercer y también hacer ejercer a nuestros alumnos.

Ya en el artículo anterior nos hemos referido a las posibilidades didácticas de algunos materiales de uso corriente: botones, cierres automáticos, botellines, carretes, bobinas, etc. Queremos en este artículo proyectar perspectivas más amplias en este mismo orden de ideas, presentando ejemplos variados de los conceptos y de las actividades matemáticas que pueden sugerir objetos diversos de la vida corriente.

LA VENTANA

Una simple ventana, por ejemplo, suministra infinidad de modelos, no sólo los de más trivial acceso, como son las figuras planas de sus marcos y vidrios, sino también los que se derivan de sus movimientos, del ajuste de batientes en sus marcos, etc. (giros, ángulos diedros, determinación de planos, traslaciones en las ventanas de autobuses y vagones de ferrocarriles, etc.).

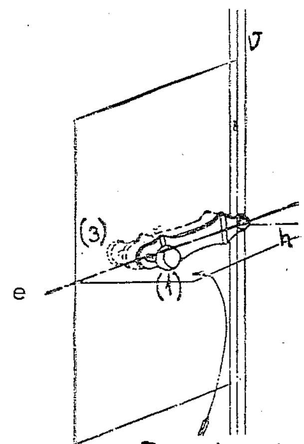
El error cometido en el cálculo de la superficie de los cristales cuando no se tiene en cuenta la parte cubierta por la masilla o por las pestañas de los marcos, puede ofrecer una oportunidad para dar reglas de acotación de este error, así como para introducir una noción de diferencial ordinaria

o logarítmica suficiente (aunque grosera) a los efectos de la enseñanza elemental.

La existencia de intersticios entre las hojas de la ventana y entre éstas y el marco, pueden servir también para ofrecer problemas de mínimo enfriamiento, según las hipótesis que se formulen acerca de dicho enfriamiento (proyecto de una ventana de enfriamiento mínimo para una superficie de iluminación dada, suponiendo, por ejemplo, el intersticio central de doble enfriamiento, por metro lineal, que los intersticios de los bordes).

La proyección del exterior sobre la superficie plana del cristal, permitirá ilustrar las propiedades de la proyección cónica con sus puntos de fuga, escalas armónicas, etc.

Si la ventana tiene persiana, la proyección estriada del espacio exterior, en el que puede desplazarse una mira topográfica vertical, permitirá ilustrar los principios de la telemetría óptica.



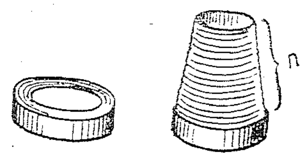
SIMETRÍAS REALIZADAS CON UNA FALLEBA

Siempre en relación con la ventana y sus accesorios, se puede utilizar la falleba y sus movimientos para obtener interesantes consecuencias sobre simetrías en el espacio. Si se compara, por ejemplo, la posición inicial (1) con la final (3) de una falleba corriente después de dos movimientos de simetría alrededor primero de un eje horizontal h, y luego de un eje vertical v, la mayor parte de los observadores estiman que la relación entre estas dos posiciones es una simetría con respecto a un plano que pasa por el eje vertical. Ahora bien, ningún movimiento es capaz de realizar una simetría plana en el espacio; el zapato derecho no puede convertirse en otro para el pie izquierdo por mucho que se le mueva. La simetría que existe entre ambas posiciones es otra : precisamente la simetría con respecto a un eje e, perpendicular a los v y h. Si analizamos el error cometido nos daremos cuenta de que se debe al hecho de que corrientemente la propia falleba tiene un plano de simetría, con lo que hemos ilustrado a la vez dos teoremas : 1.° el producto de dos simetrías respecto a dos ejes h y v, perpendiculares entre sí, es otra simetría con respecto a un tercer eje *e*, perpendicular a los precedentes, y 2.°, el producto de esta simetría por la simetría (de la falleba) con respecto a un plano que pasa por *e*, es a su vez una simetría con respecto a un plano que pasa por este eje y es perpendicular al plano de simetría precedente. Es precisamente esta última simetría la que primero salta a la vista, induciendo al engaño comentado.

Realizando nuevas manipulaciones [1] podemos relacionar las simetrías con respecto a los ejes mencionados, con la simetría respecto al centro en que concurren. En resumen : La falleba constituye un ignorado y excelente modelo para ilustrar las transformaciones que definen el grupo de simetrías con respecto a los elementos de un triedro trirectángulo. Permite también ilustrar otros muchos movimientos, obtenidos mediante productos de giros alrededor de los ejes horizontal *h* y vertical *v*, lo que asimila sus grados de libertad a los que tiene el teodolito, pero nos hemos limitado al grupo de simetrías mencionado por su interés y vistosidad.

PROGRESIONES EN LAS PERSIANAS, TAPICES Y SERPENTINAS ARROLLADAS

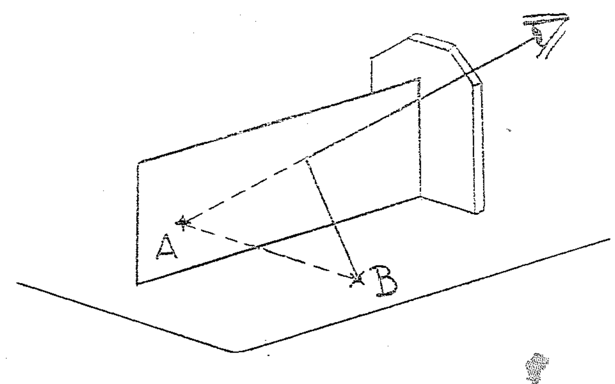
Me he referido más arriba a la persiana desplegada como modelo ilustrador de la telemetría. Pero la persiana arrollada, así como un tapiz arrollado o una simple serpentina, ofrecen un problema interesante a la curiosidad del alumno : ¿Qué longitud tendrán una vez desarrolladas? Los alumnos suelen esquematizar acertadamente los arrollamientos como circunferencias en progresión aritmética, y el problema se resuelve sumando los términos de la progresión. Los términos inicial y final se obtienen fácilmente por medición directa de los diámetros interior y exterior; el número de términos se obtiene contando simplemente las capas superpuestas (para facilitar este recuento se puede estirar la serpentina a modo de cucurucho, de modo análogo a como se deslizan oblicuamente las cuartillas de un montón para contarlas). Todos estos modelos improvisados suministran la estructura algebraica común a la suma de los términos de una progresión aritmética, al área del trapecio, y al área de la corona.



[1] Véase P. PUIG ADAM : *Didáctica matemática eurística* y Revista «Arquímedes», núm. 5-6.

LA GEOMETRÍA QUE PUEDE HACERSE CON UN VIDRIO OSCURO

Ya hemos dicho que la Geometría se concibe modernamente como el estudio de propiedades invariantes de las figuras con respecto a ciertos grupos de transformaciones. Los instrumentos que realizan estas transformaciones son, pues, los instrumentos naturales de la Geometría moderna : juego de escuadras para la traslación, papel de calco o transparente para los movimientos, etc. Un trozo de vidrio plano (con borde rectilíneo), situado perpendicularmente al plano del dibujo, es el instrumento natural para



realizar simetrías en el plano. Si el vidrio es de color oscuro, pero transparente, al mirar la cara anterior del vidrio, se reflejará en ella la parte anterior del plano del dibujo, superponiéndose la imagen reflejada de dicho semiplano anterior con la imagen transparentada del semiplano posterior. Esto permite realizar fácilmente las operaciones fundamentales siguientes :

1. *Hallar el eje de simetría de dos puntos* (mediatriz del segmento que los une) *o de dos rectas* (bisectriz del ángulo que forman).

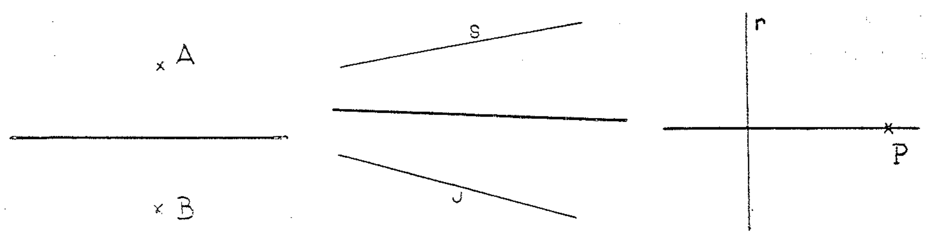
Basta mover el vidrio hasta que queden superpuestas la imagen reflejada de uno (o una) de ellos con la imagen transparentada del otro (otra). El borde marcará entonces el eje. La operación es aplicable a la construcción de la bisectriz, sea o no accesible, en el dibujo, el vértice del ángulo.

2. *Trazar la perpendicular a una recta* r *por un punto* P.

Basta situar el borde sobre este punto (esté o no sobre la recta), de manera que la imagen de la semirrecta anterior al borde, coincida con la visión transparentada de la semirrecta posterior. Reiterando la operación, se pueden trazar paralelas.

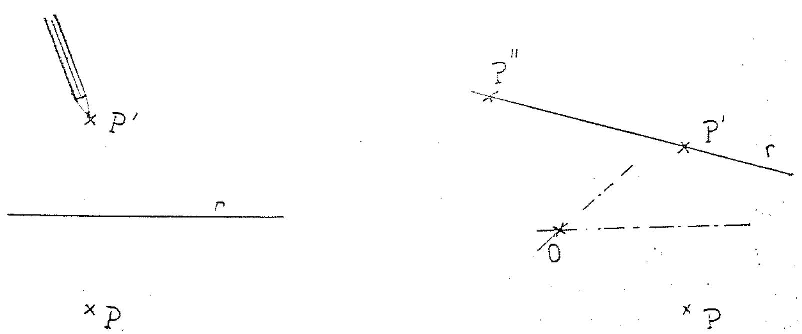
3. *Hallar el simétrico P' de un punto dado P respecto de un eje dado* r.

Situando el borde del vidrio en *r* bastará colocar la punta del lápiz del lado contrario a P, hasta que su imagen transparentada (o reflejada) coin-



cida con la imagen reflejada (o transparentada) de P. Punto por punto pueden obtenerse así figuras simétricas.

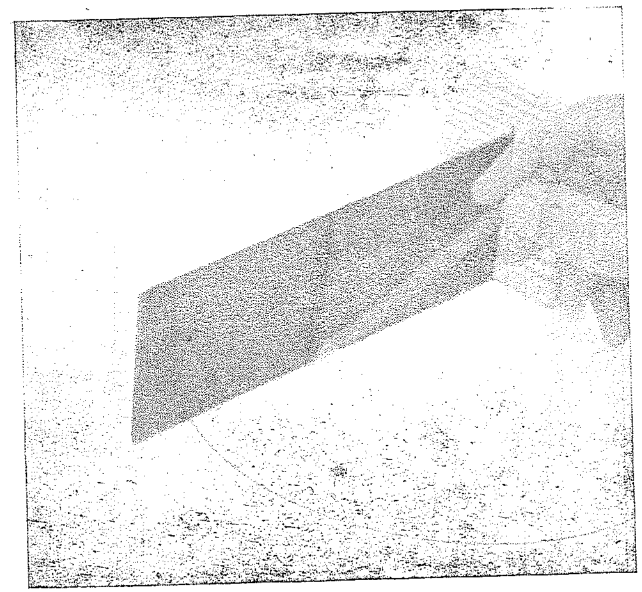
4. *Hallar la intersección de una recta dada con una circunferencia definida por su centro O y un punto P.*



Bastará situar el borde, pasando por O, de modo que la imagen de P se sitúe sobre *r*, o bien que la imagen de *r* pase por P. En ambos casos, el punto P', simétrico de P, se situará sobre *r*, proporcionando la solución. Hay, naturalmente, dos soluciones correspondientes a dos posiciones del vidrio.

Este problema es equivalente al de trazar por O las tangentes a la parábola definida por su directriz *r* y su foco P. Estas tangentes son, en efecto, las posiciones del borde del vidrio en las dos soluciones del problema anterior. Recuérdese que la directriz es el lugar geométrico de los simétricos del foco respecto de las tangentes a la parábola.

Mediante estas construcciones básicas, en las que el borde sirve también de regla, se puede probar la posibilidad de efectuar con dicho instru-



mento todas las construcciones realizables con la regla y el compás de la Geometría clásica. Claro es que no es el instrumento más adecuado para algunas de ellas. Por ejemplo, la construcción de un triángulo dados sus tres lados, equivalente al de hallar la intersección de dos circunferencias de centros y radios dados, resulta particularmente complicada. En cambio, otras construcciones son tan sencillas como puedan serlo las clásicas, cuando no las aventajan, y no nos referimos solamente a los problemas en los que el uso de la simetría constituye la clave del problema, sino también a otras, como la construcción del conjugado armónico, o del punto inverso de uno dado conocidos el centro y el radio de inversión, problemas que parecen muy alejados de las posibilidades del aparato. Resulta particularmente elegante la construcción de cónicas como envolventes mediante dicho instrumento combinado con el compás.

EL PARAGUAS, MODELO MULTIVALENTE

El juego de varillas y el eje de un paraguas, nos ofrecen un modelo matemático, del que extraer muchas lecciones geométricas intuitivas. Presentamos algunos ejemplos:

Relaciones sencillas entre los lados y los ángulos de un triángulo

Observemos el triángulo ABC formado por el eje del paraguas, una varilla corta b y el segmento a de varilla larga comprendido entre la cúspide B y la articulación C.

1. Cuando el paraguas está cerrado AB $= a + b$, sin que se forme triángulo. Para que éste exista, es preciso abrir el paraguas, disminuyendo la longitud AB. Luego AB $= c < a + b$.

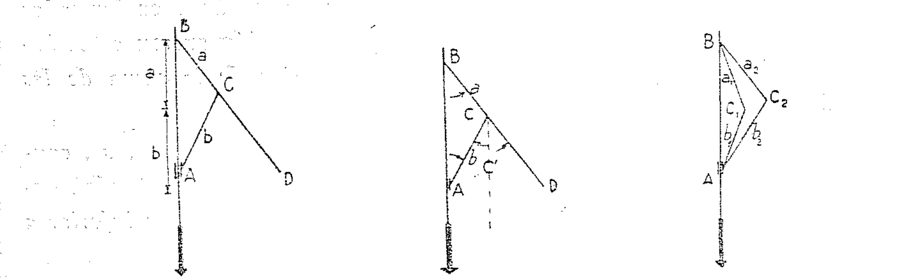
2. Abriendo el paraguas, el lado AB disminuye al mismo tiempo que el ángulo opuesto C: *Propiedad de los triángulos con pares de lados respectivamente iguales.*

3. Se observa la igualdad de todos los triángulos formados sobre la misma porción de eje AB: *Igualdad de los triángulos con tres lados iguales.*

4. Si $a = b$, los dos sistemas de varillas a y b se abren del mismo ángulo. Todos los triángulos formados son isósceles. Pero si $a \gtrless b$, las varillas b se abren $\left\{ \begin{matrix} \text{más} \\ \text{menos} \end{matrix} \right\}$ que las varillas a: *Relación entre los ángulos y los lados opuestos de un triángulo.*

5. Si b es mayor que a, el paraguas puede invertirse, formándose ángulos obtusos en B. Estos ángulos no son posibles si b es menor que a, pero entonces, a partir de la posición de b perpendicular al eje, el paraguas se cerrará, de tal modo, que se podrá obtener una misma abertura del paraguas con dos longitudes AB: *Ambigüedad de un triángulo definido por dos lados y el ángulo opuesto al menor.* Relación entre los ángulos A en ambas posiciones.

6. Mantengamos fijo el punto C y abramos el paraguas conservando el eje vertical. La varilla a gira en un sentido, describiendo un ángulo igual al B. La varilla b gira en sentido contrario, describiendo otro igual



al A. Luego, el ángulo exterior C' es igual a B + A. Y también A + B + C = C' + C = 180°.

Triedros y ángulos poliedros

7. Consideremos dos juegos de varillas a, b, articuladas consecutivas y los dos planos en que están situados. Estos dos planos forman un diedro. ¿Aumenta este diedro cuando se abre o cierra el paraguas? ¿Disminuye? La naturaleza capciosa de estas preguntas provoca a veces res-

puestas erróneas, de las que se puede obtener provecho didáctico. La corrección del error se sugiere de una manera natural, preguntando cuántos de estos diedros componen los 360° en torno al eje. Los alumnos se ven entonces obligados a reconocer la invariancia de estos diedros. ¿Qué es, por tanto, lo que aumenta o disminuye? Las *secciones oblicuas* de ese diedro.

8. Observación de los triedros (isósceles) formados por el eje y los pares de varillas a (consecutivas o no). Idem con las b.

9. ¿En qué posición quedarán las varillas a situadas en el mismo plano? ¿Cuál será entonces el valor de la suma de los ángulos formados por estas varillas (consecutivas o no)? ¿Qué modificación sufren estos ángulos cuando se cierra el paraguas? *Límite superior de la suma de las caras de un ángulo poliedro.*

10. Consideremos una tela extendida entre 3 varillas a_1, a_2, a_3, consecutivas o no. Si se suprime la varilla intermedia a_2, ¿se mantendrá extendida la tela? *Propiedad de la cara* $a_1\ a_3$ *de un triedro de ser inferior a* $a_1\ a_2 + a_2\ a_3$.

Simetrías, rotaciones, homotecias

11. Observación de las simetrías del paraguas abierto.

12. Observación del grupo cíclico de rotaciones, según el número de sistemas articulados.

13. Observación de la homotecia existente entre el sistema de puntos de articulación C y los extremos libres D de las varillas a.

Algunos problemas que se pueden proponer sobre la variación de magnitudes, producida al abrirse el paraguas por desplazamiento de A

Llamaremos x al desplazamiento del punto A a partir de su posición correspondiente al paraguas cerrado. Supondremos, además, el caso más simple: $a = b$.

14. Variación de los ángulos A y B en función de x.

15. Variación de la separación entre dos articulaciones consecutivas C (siendo n el número de sistemas articulados).

16. Variación del ángulo de las caras del ángulo poliedro formado por las varillas a.

17. Variación del ángulo sólido S limitado por ese ángulo poliedro.

18. Variación del área y del volumen de la bipirámide definida por las varillas a y b.

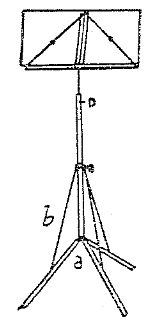
19. Máximo del volumen anterior.

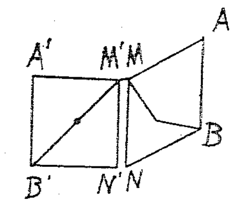
20. Cálculo del desplazamiento x correspondiente a un polígono regular (formado por los extremos libres) de perímetro dado.

LA GEOMETRÍA DEL ATRIL

Triángulos, triedros, problemas diversos

El pie del atril tiene la misma estructura geométrica que un paraguas (invertido) con tres pares de varillas articuladas. Se pueden obtener de él las mismas situaciones didácticas expuestas en los párrafos anteriores





Movimientos espaciales

El deslizamiento de la varilla central a lo largo del eje, permite imprimir al atril movimientos de translación a lo largo de este eje, movimientos de rotación en torno a él y movimientos helicoidales.

Deformaciones que ilustran las propiedades del arco capaz

El atril propiamente dicho, está constituído por dos rombos articulados, unidos por un lado. Este doble rombo proporciona varias situaciones didácticas. Es un sistema articulado que hemos utilizado en alguna lección [2] sobre los ángulos inscritos y el arco capaz, de tal modo que si se fija la posición de dos lados NB, N'B' (o bien MA, M'A'), dejando un solo grado de libertad a la deformación, y se suponen confundidos MN y M'N',

[2] V. P. PUIG ADAM: «El Material Didáctico matemático actual», pág. 132.

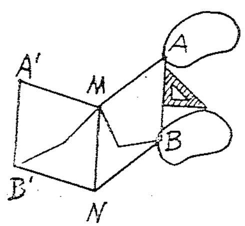
los ángulos B'MB y A'NA son invariantes durante esta deformación y el punto M (o el N) describe el arco capaz de B'MB (o A'NA) sobre BB' (o AA').

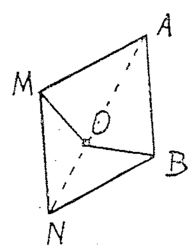
Translación plana

Si fijamos el lado A'B', queda un sistema articulado con dos grados de libertad, que permite describir al punto A una figura cualquiera (entre ciertos límites). Simultáneamente, el punto B describirá una figura igual, transformada de la anterior por la translación AB.

Inversión

Finalmente, consideremos el sistema articulado MOB, que enlaza los vértices M, B, de uno de los rombos; sistema formado por dos varillas de longitud igual a la mitad de la diagonal del cuadrado obtenido por



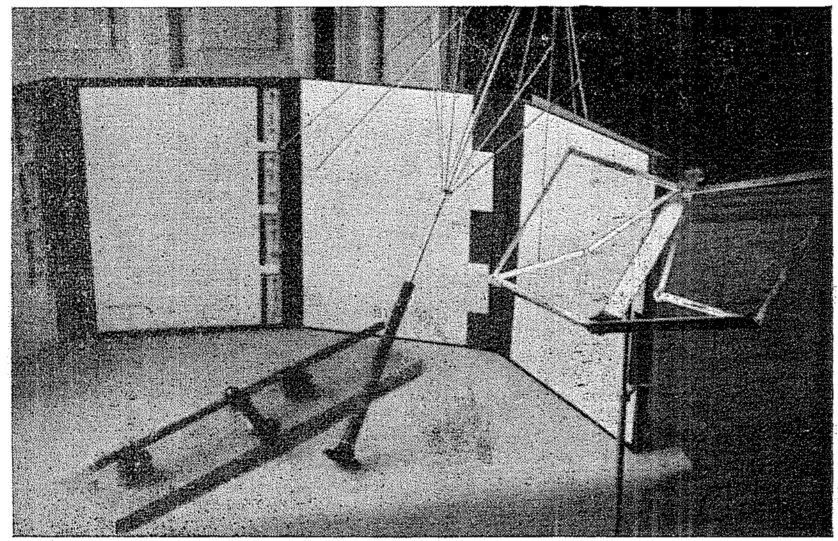


deformación del rombo. Si fijamos en el plano el punto O, el rombo NBAM posee dos grados de libertad que permiten describir al punto A una figura plana cualquiera (entre ciertos límites), y la figura descrita por el vértice opuesto N es inversa a la descrita por el punto A, respecto al centro O, con potencia de inversión igual a $\frac{1}{2}$ MA^2 (puesto que el producto OA . ON es la potencia de O respecto del círculo de centro M y radio MA y vale $MO^2 - MA^2 = \frac{1}{2} MA^2 - MA^2$).

LA MATEMÁTICA DE LOS ESCOMBROS

Finalmente, entre los escombros, en los resíduos de cosas rotas que ya aparentemente de nada sirven, pueden hallarse problemas interesantes al reconstruir parcialmente las figuras geométricas a las que aquellos trozos pertenecían.

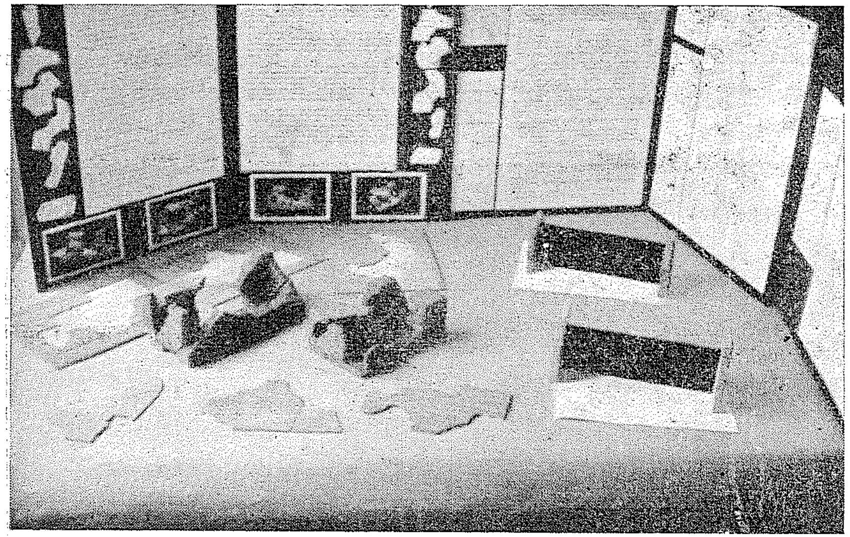
Cada figura geométrica se caracteriza por un cierto número de parámetros, de tal suerte que si todos ellos están presentes en el trozo parcialmente



La falleba, el paraguas y el atril, modelos matemáticos extraídos de la vida

reconstruído, la reconstrucción total será una cuestión de pura y simple geometría. Cada información que se propone obtener a los alumnos sobre la figura buscada (ángulos, perímeros, áreas, volúmenes), dará lugar a construcciones y a cálculos que el alumno acometerá con interés en virtud del clima de misterio creado a su alrededor.

La Arqueología no tiene otro objeto que la reconstrucción de antiguas civilizaciones a partir de los resíduos que se han descubierto en las excavaciones. Los problemas que plantean tienen, pues, a menudo, carácter eminentemente matemático, no solamente en relación con las formas geométricas que su arte nos ha legado, sino también en la reconstrucción de su escritura, de su lengua, de su técnica de cálculo, etc. En este terreno, los problemas tienen una determinación mucho menos precisa, y la Estadística desempeña en ellos un papel particularmente importante. Baste re-



La geometría con un vidrio oscuro. Problemas de reconstrucción geométrica con trozos de cascote

cordar a este propósito las relaciones existentes entre la criptografía y la moderna teoría de la información, relaciones a las que nos hemos referido en el artículo que sobre esta teoría hemos reproducido en el capítulo segundo de esta obra.

§ 5. LA MATEMATICA EN EL JUGUETE

Una clasificación de los juguetes

Si la vida corriente suministra tantos modelos y situaciones aptas para la enseñanza matemática, es natural que busquemos, asimismo, modelos matemáticos en los juguetes que tan esencial papel desempeñan en la vida del niño, promoviendo su más espontánea actividad. Este acercamiento entre matemática y juguete nos suministrará, sin duda, amplias sugerencias para alcanzar la meta ideal de nuestra enseñanza, que es la de convertirla recíprocamente en un juego para el niño.

Según el género de actividad que preponderantemente desarrollan, podemos establecer varios géneros de juguetes, sin que ello signifique una separación tajante de actividades que, en general, aparecen superpuestas en un mismo juego; por ello hemos antepuesto el adverbio «preponderantemente». Distinguiremos, pues:

1.° Juguetes de *ejercicio físico*: pelotas, balones, aros, triciclos, bicicletas, patines, patinetes...

2.° Juguetes de *destreza*: bolos, billar, ping-pong, diávolo, tiro al blanco, arcos y flechas, bolavá, trompos, cometas, planeadores, etc....

3.° Juguetes de *ritmo y sonido*: trompetas, tambores, pianitos, guitarras, cítaras, xilófonos...

4.° Juguetes de *compeción inteligente* (con o sin azar): dominó, damas, asalto, ajedrez, mandarín, parchís, cha-cha-chá, juego de quince, de cinco en línea, ruletas, loterías...

5.° Juguetes de *creación constructiva:* rompecabezas, mosaicos, mecanos, cajas de arquitectura, juegos de plastilina, imprentillas, carpinterías...

6.° Juguetes de *observación contemplativa:* (estáticos): caballos de cartón, muñecas, muebles, cocinas, barcos, soldaditos, circo...; (dinámicos): trenes, coches y demás autómatas con cuerda, balanzas y pesas...

No nos vamos a detener, por lo triviales y sabidas, en alusiones a las formas geométricas que aparecen en tales juguetes: rectángulos (billar, dominó), cuadrados (damas, ajedrez), triángulos, rombos (mosaicos), figuras circulares (aros, fichas, bicicletas, ruedas), esféricas (balones, pelotas), cilíndricas (patines, tambores), cónicas (trompetas, diávolo), troncocónicas (bolavá), etc. De ellas puede sacar partido cualquier maestro para urdir problemitas en relación con el juego respectivo, por ejemplo, número de golpes de pedal necesarios para desplazarse de un punto a otro en un triciclo, etc. Deseamos abreviar, asimismo, las referencias al provecho que puede obtenerse de los juegos de lotería combinándolos acertadamente con problemas de índole aritmética (véase lo dicho en el capítulo anterior a propósito de los lotes en el método de los números en color), así como de la contribución que las disposiciones en filas de fichas y soldaditos pueden aportar a la enseñanza de temas aritméticos diversos, como son las propiedades formales de las operaciones, las de los múltiplos y divisores, números primos y compuestos (véase el artículo anterior y los ejemplos alusivos en nuestra colección de libritos didácticos elementales), etc.

JUGUETES DE ANÁLISIS Y JUGUETES DE SÍNTESIS. JUGUETES CON DINAMISMO RELACIONAL

Considerando el juguete desde un punto de vista matemático algo más elevado, queremos fijar nuestra atención especialmente en los tres últimos grupos, por la oportunidad que vemos en ellos de cultivar actividades mentales estrechamente relacionadas con la actividad matemática. Así, hablando en líneas generales, se entiende, llamaríamos a los juguetes del grupo 6.° juguetes de *análisis*; a los del grupo 5.°, juguetes de *síntesis*, y a los del grupo 4.°, juguetes de *dinamismo relacional*, y nadie pondrá en duda de que, tanto el análisis, como la síntesis, como el dinamismo relacional, son actividades esencialmente integrantes de la actividad matemática. Pero justifiquemos estas denominaciones:

Juguetes de análisis.—Los juguetes contemplativos, y muy en especial los dinámicos, son un excitante desafío a la curiosidad del niño: ¿Cómo está hecho? ¿Cómo funciona? Tarde o temprano el juguete sucumbe a tal curiosidad, y en buena hora sucumba si resulta en provecho intelectual del pequeño. Analizando, descomponiendo, aunque sólo sea mentalmente, satisfará el niño su legítima curiosidad. Y es, en este análisis o descomposición mental o real, cuando el niño puede hallar los posibles valores matemáticos del juguete cuya simple contemplación no bastaba a satisfacerle. En la mayor parte de los juguetes mecánicos late en el fondo una idea matemática. En sus movimientos de avance y giro hallaremos múltiples oportunidades para establecer relaciones de proporcionalidad entre longitudes y ángulos, para calcular velocidades lineales y angulares, etc. Los juegos de engranajes de tales juguetes mecánicos permitirán asimismo ilustrar problemas de múltiples comunes y de m. c. m.

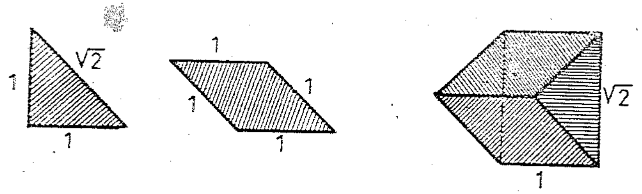
Juguetes de síntesis.—Mayor campo permiten a la fantasía creadora del niño los juguetes constructivos o de síntesis, entre los cuales ya hemos tenido ocasión de citar el Mecano como juguete multivalente, inapreciable para la síntesis de figuras geométricas, tanto estáticas como dinámicas. Es del mayor interés que el niño no se limite a reproducir con el Mecano los modelos de catálogo, sino que sea él mismo creador de formas y combinaciones dinámicas nuevas a las que su fantasía empezará superponiendo objetivos funcionales imaginarios, hasta que estos objetivos terminarán dominando y conduciendo la acción creadora. Lo mismo podemos decir de los variados tipos de juguetes constructivos constituídos por bloques, placas, arcos, vallas, y demás elementos de evocación arquitectónica y urbanística, o simplemente decorativa como mosaicos, anillas, ganchos, bolitas coloreadas colocadas sobre redes de orificios, etc. En particular, los rompecabezas (lo mismo que la actividad de recomposición de piezas rotas aludida en el artículo anterior) cultivan grandemente el reconocimiento de formas geométricas ajustables. Simplemente el modo de formar mosaico plano con cuadriláteros irregulares iguales entre sí, es un juego que puede improvisarse en cualquier momento y que contiene infinidad de enseñanzas no triviales. Cabalgando entre este tipo de juegos sintéticos y el de juegos relacionales, cabe catalogar el material de regletas coloreadas de Cuisenaire, que se presta tanto a la síntesis constructiva como al juego dinámico generador de las leyes de la Aritmética y del Algebra.

Juegos de dinamismo relacional.—Variadas y amplias estructuras relacionales ofrecen los juegos citados de competición inteligente. Cada uno de ellos se funda en reglas dinámicas de transformación (y, por tanto, *algebraicas* en sentido lato) interesantes de analizar, ya que ofrecen no pocas oportunidades a la educación matemática moderna. Para el matemático moderno (me refiero concretamente a los de la escuela algebrista-formalista) la creación matemática es algo así como un juego en el que se suponen dados ciertos elementos (símbolos), así como ciertas reglas de juego que los relacionan (leyes formales), con las cuales le basta al matemático para crear, jugando con ellas y cuidando de no transgredirlas. El contenido conceptual de tales símbolos y de tales relaciones es algo que el matemático formalista puro deja a un lado. Mientras no llegue a dos jugadas contradictorias el juego es válido y la estructura teórica edificada sobre este juego tiene toda la firmeza y estabilidad derivada de la no contradictoriedad de sus leyes formales fundamentales.

Presentamos a continuación tres ejemplos de auténticos juegos que van a ofrecernos considerable riqueza de estructuras matemáticas, y empezaremos concretamente con un juego mosaico, es decir, con un juego no catalogado precisamente entre los de competición, sino entre los constructivos, con lo que nos brinda otro ejemplo de material educativo multivalente [1].

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS EN UN JUEGO MOSAICO [2]

Material: Una o dos cajas de mosaicos de colores, con piezas de dos clases; triángulos rectángulos isósceles iguales entre sí y rombos con ángulos agudos de 45° y lados iguales a los catetos de los triángulos. Estos mosaicos de juguete se venden en los bazares con el nombre de «Rombo». La inconmensurabilidad de las áreas de estas piezas me sugirió una lección activa sobre irracionales cuadráticos y su cálculo, que conduje del siguiente modo:



Empecé distribuyendo entre los alumnos (de 3.° y 4.° de Bachillerato) piezas de las dos clases, y preguntándoles los valores de sus ángulos, el

[1] En nuestro librito sobre «Didáctica matemática eurística» hacemos también uso del juguete llamado «Bolaoá», clasificado entre los de destreza, para urdir una divertida lección sobre parábolas y trinomio de segundo grado.

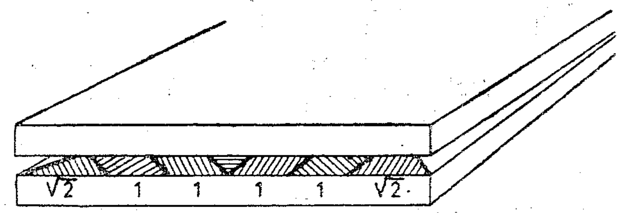
[2] Artículo del autor publicado en la revista belga «Mathematica & Pedagogica», núm. 10, 1956-57.

de la hipotenusa del triángulo (tomando el cateto como unidad); y el del área de una y otra pieza. No es raro que la del rombo ofrezca alguna pequeña dificultad. Se puede ayudar a resolverla componiendo la figura adjunta o dejando simplemente que averigüen la altura del rombo por aplicación del teorema de Pitágoras.

Resultados: Area del triángulo, $1/2$; área del rombo, $\sqrt{2}/2$.

Los escribo en el encerado y propongo la siguiente cuestión: «Con estas piezas del mosaico se pueden construir multitud de figuras diversas. Si formamos, aparte, figuras sólo con triángulos y figuras que solamente contengan rombos, ¿será alguna de las primeras equivalente a alguna de las segundas? De otro modo: ¿Se puede sustituir un número de triángulos por un número de rombos de modo que las áreas sustituídas sean equivalentes?»

Los alumnos con los que operé ya sabían por aritmética la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$. Tuve, sin embargo, que recordar su significado: Imposibilidad de que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ o, de otro modo, imposibilidad de que $n\sqrt{2}$ sea igual a m unidades (m, n enteros). Con este recuerdo, conseguí ya que algunos de los alumnos, vieran la imposibilidad análoga de que un cierto



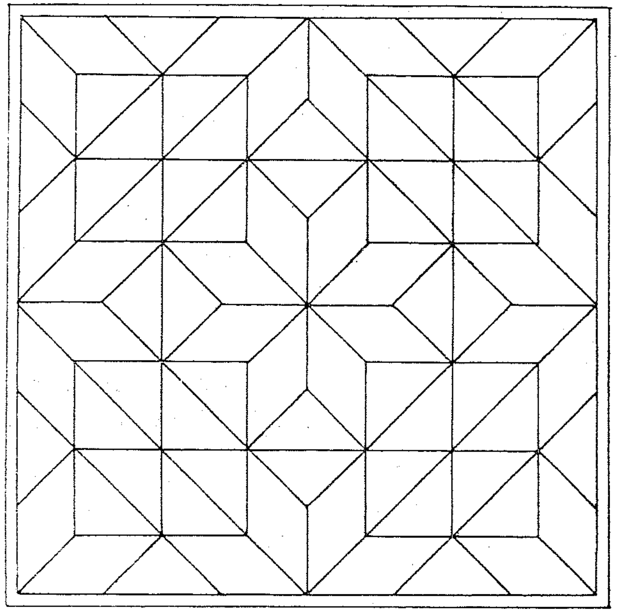
número de veces $\sqrt{2}/2$, área del rombo, equivalga a otro cierto número de veces el área del triángulo $1/2$. Recalqué, diciendo: «Las áreas de los triángulos y las de los rombos son como dos mundos aparte no intercambiables. Toda figura compuesta de triángulos y de rombos tendrá un área con una parte racional procedente solamente de los triángulos que contiene y una parte irracional, procedente de los rombos.»

Después de llegar a esta consecuencia, abro ligeramente una de las cajas cuadradas del juego con objeto de dejarles ver solamente un borde. En él ven la constitución de uno de los lados del cuadrado, cuya longitud consta de cuatro lados de rombos (1) y dos hipotenusas de triángulos ($\sqrt{2}$) e inmediatamente les propongo averiguar cuántas piezas de cada clase contiene la caja, es decir, hay en el cuadrado.

Tras breve reflexión calculan el cuadrado de $4 + 2\sqrt{2}$

$$(4 + 2\sqrt{2})^2 = 16 + 4 \,.\, 2 + 2 \,.\, 8 \,.\, \sqrt{2} = 24 + 16\sqrt{2}$$

de lo que resulta que la caja contiene 48 triángulos y 32 rombos.



Repito la cuestión para cajas de distintos tamaños y aun para rectángulos que los mismos alumnos pueden idear. Por ejemplo, el rectángulo de dimensiones $3 + 2\sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{2}$ exige 14 triángulos y 10 rombos, como se obtiene fácilmente calculando el producto

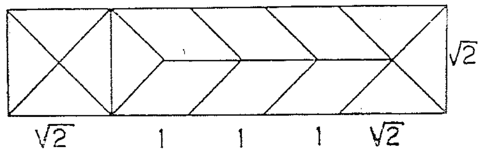
$$(3 + 2\sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 3 + 2 \,.\, 2 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 7 + 5\sqrt{2}$$

El cálculo previo del número de piezas necesarias de una y otra clase facilita mucho la construcción efectiva, con la que puede terminar en forma de juego instructivo la lección.

NOTA I.—Es preciso que los rectángulos propuestos sean efectivamente de posible construcción; lo son efecto, excepto aquellos que tienen una

dimensión racional, y la otra irracional. Es fácil ver que la irracionalidad en una dimensión exige el empleo de triángulos rectángulos (la $\sqrt{2}$ sólo procede de hipotenusas), lo que implica la aparición de otra dimensión irracional (su mitad) en la dirección perpendicular.

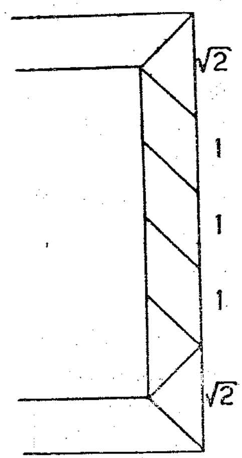
Pero, demostremos que esta condición es suficiente. La construcción efectiva de los rectángulos con dos dimensiones racionales es inmediata,



así como la de los rectángulos de dimensiones de la forma $a\sqrt{2}$ y $b\sqrt{2}$ (a, b, enteros). Tanto unos como otros, no exigen más que el empleo de triángulos.

La construcción de rectángulos de dimensiones de la forma $m + n\sqrt{2}$ y $p\sqrt{2}$ puede reducirse a la de p bandas de dimensiones $m + n\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$, que pueden obtenerse por medio de $2m$ rombos y $4n$ triángulos cada una, como muestra la figura en el caso particular $(3 + 2\sqrt{2}) \,.\, \sqrt{2}$, fácil de generalizar.

Para estudiar el caso general $(m + n\sqrt{2})(m' + n'\sqrt{2})$ analicemos, ante todo, la construcción de un cuadrado de lado $m + n\sqrt{2}$. Colocando, contigua a cada uno de sus lados, y hacia el interior, una banda trapezoidal de altura $\sqrt{2}/2$, formada de m rombos y de $2n - 1$ triángulos, el problema se reduce a la construcción del cuadrado de lado $m + (n - 1)\sqrt{2}$. Una nueva banda de m rombos y de $2n - 3$ triángulos reducirá el lado del cuadrado central a $m + (n - 2)\sqrt{2}$, y así sucesivamente, llegaremos a dejar en el centro la construcción de un cuadrado de lado m, constructible mediante $2m^2$ triángulos. Es fácil comprobar que el número total de triángulos y de rombos utilizados en esta construcción es respectivamente $2m^2 + 4n^2$ y $4mn$, lo que corresponde al cálculo algebraico previamente efectuado.



La misma técnica permite construir todos los rectángulos de la forma

$$(m + n\sqrt{2})\,(m' + n\sqrt{2})$$

dejando en el centro el rectángulo mm' orlado con n bandas.

El caso general $(m + n\sqrt{2})\,(m' + n'\sqrt{2})$ en el que $n' = n + p$ puede reducirse a los precedentes mediante la descomposición en dos rectángulos como sigue:

$$(m + n\sqrt{2})\,(m' + n'\sqrt{2}) =$$
$$(m + n\sqrt{2})\,(m' + n\sqrt{2}) + (m + n\sqrt{2})\,.\,p\sqrt{2}$$

Un estudio semejante puede ser hecho para figuras con forma de rombo, trapecio o más complicadas. No es de esperar que los alumnos de la edad indicada descubran los procedimientos deductivos de construcción expuestos. En general, aciertan después de reiterados tanteos.

NOTA II.—Los lados y las áreas de los triángulos estudiados, constituyen un ejemplo simpático de lo que en Algebra moderna se llama anillo de integridad, salvo interpretación de elementos negativos que podrían realizarse por medio de piezas en negro. Si se efectúa, en efecto, las construcciones sobre fondo negro, la superposición de piezas negras produce el mismo efecto visual que la supresión de la figura cubierta.

Pero entonces, la posibilidad de las construcciones se complica.

ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS EN UN JUEGO SOLITARIO [3]

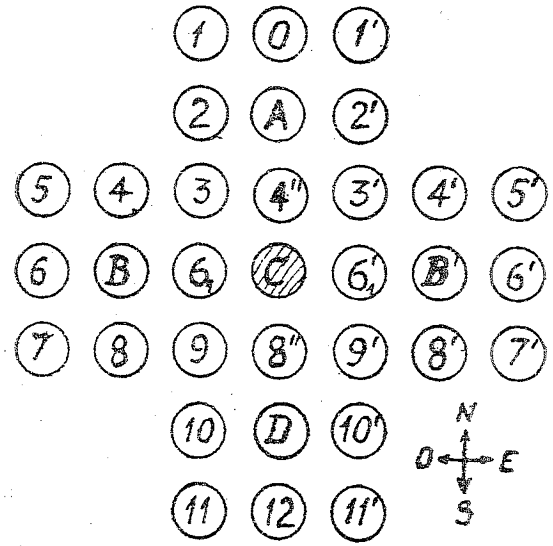
1. En esta nota me propongo ilustrar cómo la consideración de ideas de simetría y dualidad, permite guiar la solución de un juego solitario, bastante difundido y de cierta dificultad cuando se intenta resolverlo sin una conducción racional de su estrategia. Este juego se expende en el comercio con el absurdo nombre de «Cha-cha-chá».

2. El juguete consta de una placa con 33 orificios dispuestos en estructura de cruz, como indica la figura, a los que se ajustan otras tantas fichas o peones.

Suprimida la ficha del orificio central, el juego consiste en eliminar fichas saltando sobre ellas con otras en las cuatro direcciones, que llamaremos, para abreviar, N, S, E, O, como si se tratara de los puntos cardinales de un mapa. Los saltos en diagonal están prohibidos. *Es preciso llegar a conseguir que quede una sola ficha en el orificio central.*

[3] Estudio publicado en «Gaceta Matemática», 1.ª serie, tomo IX, núm. 1.

Con objeto de describir la estrategia, designemos los orificios por los números y letras de la figura; números que permiten establecer criterios de equivalencia aritmética, que sean reflejo de los de equivalencia resultante de las reglas de juego.



3. Considerando, en efecto, equivalentes los orificios que una misma ficha puede recorrer por saltos (no hay en el juego otra clase de movimientos) o las fichas que pueden ir a parar a un mismo orificio por saltos, vemos que éstos orificios o fichas quedan clasificados en las cuatro clases de equivalencia siguientes (los caracteres idéntico, transitivo y recíproco de dicha equivalencia son evidentes):

1.ª	12 esquinas con números impares (congruentes, mod. 2)	1^er^ grupo
2.ª	5 centros de cuadrados con letras A, B. B', C, D	1^er^ grupo
3.ª	8 puntos medios de lados con mult. de 4, cero incluído.	2.º grupo
4.ª	8 ídem con números congruentes con 2 mod. 4	2.º grupo

4. Se observa que:

I. Las fichas del primer grupo (formado por las dos primeras clases) son las que saltan sobre las del segundo (formado por las dos últimas), suprimiéndolas, y recíprocamente. Será, pues, táctica prudente mantener equilibradas a lo largo del juego las fichas de uno y otro grupo para que la falta de elementos de un grupo, no acarree como consecuencia la imposibilidad de supresión de las del otro. Claro es que no es regla indispensable, ya que un salto múltiple puede en ciertos casos restituir el equilibrio.

II. Suprimida inicialmente la ficha central, las otras cuatro, A, B, B', D, son *las únicas* que podrán ocupar finalmente el orificio central. Habrá, pues, que conservar alguna de estas fichas hasta el final. La inadvertencia de este hecho condena a la esterilidad la mayor parte de las tentativas; por ello destacamos estas fichas de las demás, designándolas mediante letras.

III. Observando las múltiples simetrías del sistema de orificios, que son las mismas del cuadrado central, y de las que resulta la invariancia de la figura respecto a un giro de 90 grados, parece natural tenerlas en cuenta en la estrategia; es decir, seguir esquemas de movimientos de tendencia simétrica o giratoria. Y digo sólo de tendencia, por cuanto la simetría ha de perderse necesariamente en todo movimiento que desplace de su eje las fichas situadas en él. En la figura hemos realzado la simetría respecto al eje NS, dando la misma designación a ambos lados, acentuando los signos del lado derecho.

IV. Pero no solamente existen las simetrías geométricas mencionadas, sino que el juego presenta también otra especie de simetría temporal que resulta de su reversibilidad. Una estrategia correcta empieza, en efecto, con un solo orificio en el centro y termina con una sola ficha, también en el centro. Bastará, pues, partir de esta ficha central y retroceder invirtiendo los saltos y colocando una ficha nueva sobre cada orificio saltado (en vez de suprimirla como en el proceso directo) para volver a llenar toda la estructura, menos el orificio central. Ahora bien, esta estrategia dual lo mismo puede seguirse en blanco (fichas) que en negro (orificios); es decir, partiendo nuevamente de un orificio central e invirtiendo simplemente el orden de los saltos de la estrategia primitiva. Cada solución que obtengamos suministrará, pues, automáticamente, otra solución dual. Y será buena norma estratégica vigilar las primeras estructuras de orificios obtenidas para intentar llegar al final a estructuras análogas de fichas que conduzcan inversamente a la posición central deseada.

5. Con el precedente análisis estructural del juego y con las normas estratégicas generales que de él han resultado, podemos ya iniciar los ensayos y conducir las jugadas. Describiremos éstas indicando simplemente la ficha suprimida en cada una, mediante la designación del lugar ocupado por ella en la figura. Cuando pueda haber ambigüedad sobre la ficha que salta, añadiremos a continuación la dirección del salto (N, S, E, O). Intercalamos las indicaciones que guían la estrategia seguida en relación con las observaciones anteriores.

Primera jugada: 4'' o cualquiera de sus tres equivalentes simétricas.

Segunda: Parece natural 3 (o su equivalente 3'). Se pierde la simetría.

Tercera: Ensayemos 4''N en atención a la mejor posibilidad que ofrece para jugadas sucesivas. Obsérvese ahora la estructura asimétrica de los cuatro orificios vacíos, estructura en forma de L con el extremo del lado corto en el centro.

Cuarta: 3', restituyendo la simetría y equilibrando las fichas pares e impares.

Siguen naturales los saltos sobre 2 y 2', así como 3O, A y 3', restituyendo nuevamente la simetría. En este momento ha quedado suprimido todo el cuadrado superior.

La sucesión de jugadas simétricas que siguen surgen de modo tan natural que apenas necesitan justificación: 4, 4', 6, 6', BN, B'N, 3N, 3'N, 4, 4', 3, 3'. Quedan ahora las fichas del cuadrado inferior y las dos laterales próximas al orificio central.

En este momento hay que movilizar la ficha 8'', renunciando ya a la simetría (los saltos sobre las fichas 6_1 $6'_1$ colocarían fichas en las posiciones 3 y 3', sin posibilidad ulterior de retroceso). Hemos de conservar ahora la ficha D, única que puede ir al centro. No podemos saltar sobre ella, pero sí rodeándola. Finalmente, en atención a la observación IV, procuraremos llegar a obtener una estructura de cuatro fichas en forma de L con el extremo del lado menor en el centro. Estas normas permiten salvar este único momento, de cierta dificultad, continuando con las siguientes jugadas: 9, 10, 12, 9S, 10, 9, 8''N.

Llegamos a la estructura en L deseada, dual y simétrica, respecto de la diagonal NE, de la obtenida después de la tercera jugada. Las tres jugadas finales serán, pues, duales y simétricas de las tres primeras, en orden inverso: 6'₁ E, 9', 6'₁, y termina el juego.

Claro es que saltando en la última jugada sobre B' terminaríamos con la ficha en 6'. En consecuencia, aplicando la estrategia dual podemos partir de un orificio único en 6' y llegar a una ficha única en el centro.

6. Sin pretender hacer un análisis exhaustivo de todas las soluciones posibles, indicaremos otras para dar idea de diferentes estrategias posibles. Pasamos por alto, por consiguiente, las variantes que resultan de la estrategia anterior o de su dual por aplicación de alguna de las simetrías o giros del tablero de juego.

Otra solución que conserva una cierta simetría respecto de una diagonal, es la siguiente: 4'', 3, 4''N, A, 2, 3O, 3', 2', 4'', 3N, 4, 3, 6_1N, B, 6_1, 9, 8, 9S, 10, 9, 12, D, 10, 9, 9', 8', 6', 9'E, 8', 9' y $6'_1$. Y su dual inversa $6'_1$, 9', 8', etc.

Otra solución que barre circularmente los cuadrados: 4'', 3', 4''N, A, 2', 3'E, 3E, 2, 4'', 6_1E, 9, 8, 6, 9S, 10, 9, 8, 9', 8'', DN, 9', 10', 9'S, 8', 9', 3'N, 4', B', $6'_1$, 3', $6'_1$. Y su dual inversa.

Otra solución que nos comunica amablemente el profesor Pascual Ibarra y que, además de reflejar estructuras simétricas respecto de una diagonal (jugadas 18 y 22), tiene la particularidad de conservar hasta el final las cuatro fichas marcadas con letras (con el desequilibrio consiguiente de grupos) es: 4'', 3, 4'', 2, 0, 2', 4', 3, 3', 2, 2', 9, 8, 6, 9O, 8, 9, 10, 9'N, 8', 9', 10', D, 9, B, 3, 3', B'O, $6'_1$, 3', 4''.

7. Nos parece todavía interesante añadir que el juego es realizable partiendo de orificios distintos del central. Al final del párrafo 5 ya hemos hecho alusión a la posibilidad de partir de un orificio vacío en 6', o cualquiera de sus simétricos 6, *0,12,* terminando asimismo el juego con una ficha en el centro.

Finalmente, partiendo de un orificio vacío en cualquier otro punto del tablero, puede resolverse el juego terminando con una ficha en el mismo orificio de partida. Con objeto de simplificar el descubrimiento y la descripción de la estrategia en cada caso, todavía haremos aplicación de otro carácter general de la actividad matemática: La combinación de estructuras simples (leyes formales de las operaciones, por ejemplo) para la consecución de estructuras más complejas (multiplicación de polinomios, por ejemplo). Aquí la estructura operatoria simple es el salto. La

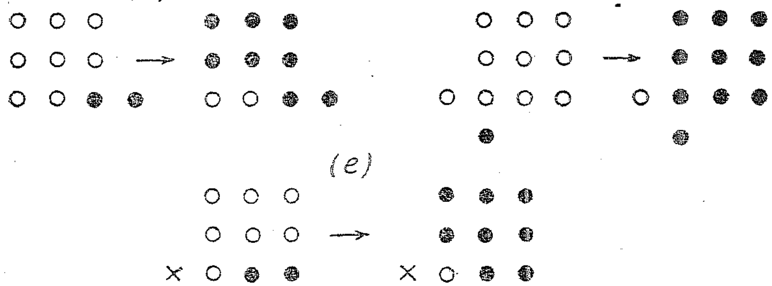
combinación de saltos permite obtener las reglas de transformación indicadas en las figuras (*a*) y (*b*) y sus equivalentes por simetría o rotación.

(a) (b)

Por combinación de éstas se desprenden, a su vez fácilmente, las transformaciones más complejas expresadas en las figuras (*c*), (*d*) y (*e*), y sus equivalentes por simetría o rotación.

Esta última transformación es realizable, exista o no ficha en el orificio señalado con una cruz. Si existe ficha en él, se empezará suprimiendo la terna vertical por (*a*) y luego se aplica (*b*). Si no existe ficha se saltará primero sobre la ficha central del cuadrado, se suprimirá luego la terna vertical y un salto doble termina la transformación.

(c) (d) (e)



La aplicación sistemática de estas transformaciones permite resolver el problema de un orificio inicial descentrado, terminando con una ficha en idéntica posición. Exceptuamos las posiciones axiales 0, 12, 6, 6', en las que, como hemos dicho, se termina con ficha en el centro o en los extremos del eje perpendicular. Bastará estudiar las posiciones 4'', 3, 4, 5 y A, ya que cualquier otra se reduce a éstas por simetría. He aquí las soluciones:

Orificio en 4'': Suprimir todas las fichas del cuadrado E (*d*). Dejar sólo la ficha 3 en el cuadrado N (*e*). Dejar sólo 9 y 8'' en el cuadrado S (*c*) Suprimir el cuadrado O (*d*). Saltar sobre C.

Orificio en 3 : Saltar sobre 4''. Dejar sólo 3 en el cuadrado N (*e*). Dejar $6'_1$ y 9' en E (*c*). Suprimir todo el S (*d*). Dejar 3 y 6_1 en el O (*c*). Suprimir la terna 6_1, C, $6'_1$ (*a*).

Orificio en 4 : Saltar sobre 3 y 2. Suprimir todo el E (*d*). Dejar 3 en N (*e*). Dejar 9 y 8'' en S (*c*). Dejar 3 en O (*e*). Saltar sobre C y 3.

Orificio en 5 : Saltar sobre 4, 6_1, 3O, 4, B, 8. Suprimir E. Dejar 3 en N. Dejar 9 y 8' en S. Saltar CN, 3, 6_1, 4.

Orificio en A : Saltar 4''. Suprimir E. Dejar 3 en N. Dejar 9 y 8'' en S. Saltar 9, 8, 9O, 6, 8, 9, 3, 6_1, 4''.

Claro es que puede terminarse también con una sola ficha en posiciones diferentes a las del orificio de partida, pero las posiciones terminales están asociadas con las del orificio de partida, pudiendo elegirse entre ellas, pero no entre las demás. Es decir, y se comprende que así sea, con un orificio inicial en un lugar no puede terminarse con una ficha en cualquier otro lugar. No es difícil ver las asociaciones, pero como el objeto de este artículo no es un estudio del juego en sí, sino de las aplicaciones que en él pueden efectuarse de ideas matemáticas para su simplicación y generalización, damos por terminado este artículo estimando nuestro propósito suficientemente logrado.

ESTRUCTURA DE GRUPO EN EL JUEGO DE LAS QUINCE FICHAS

Es bien conocido el juego (llamado «Taquin» en Francia, «Solitario del 15» en España, etc.), consistente en ordenar en una forma determinada quince fichas cuadradas iguales, numeradas del 1 al 15, en un cuadrado de cabida para dieciséis, partiendo de una ordenación cualquiera de las quince fichas, y corriéndolas en forma de que vayan ocupando las posiciones del hueco sobrante; de modo que en cada posición el hueco sólo puede ser ocupado por las fichas colaterales al mismo.

De antiguo se sabe que no es posible la solución en todos los casos y que solamente la mitad de las 16 ! colocaciones posibles, pueden ser transformadas de este modo en una ordenación prefijada. Objeto de esta nota es dar una breve demostración de este hecho, relacionándolo con la teoría de grupos de sustituciones. Dado lo muy divulgado que ha sido el juego y la naturaleza del mismo, sin duda no será ésta la primera aplicación que se haga de dicha teoría al juego; pero es también posible que esta demostración tenga alguna novedad de enfoque, por lo que, sin ánimo

de emplear tiempo en consultas bibliográficas, dada la escasa importancia del asunto, la divulgamos a efectos puramente didácticos, como un ejemplo más de aplicación de ideas matemáticas a los juegos [4].

Todas las transposiciones de fichas que se pueden obtener mediante los movimientos del juego, forman evidentemente un *grupo*, y vamos a ver que es precisamente un subgrupo del grupo (simétrico) de sustituciones entre 16 elementos : el que conserva la paridad del número de inversiones de los guarismos grabados en las fichas, al considerar éstas invariablemente ordenadas, según un orden fijo de lugares. Precisamos este concepto :

Cada ficha lleva inscrito un número y ocupa al mismo tiempo un lugar. Establezcamos un orden invariable de lugares, por ejemplo, el orden

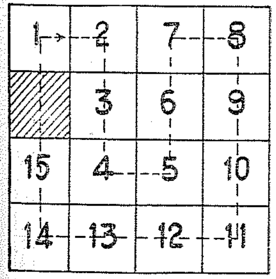


Fig. 1.ª

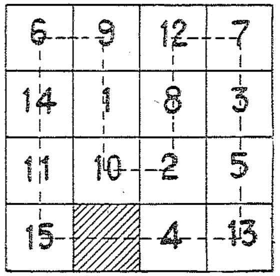


Fig. 2.ª

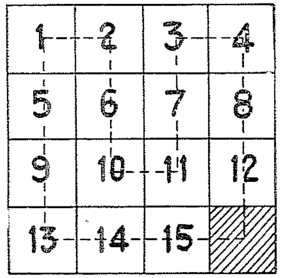


Fig. 3.ª

marcado en la figura 1.ª, en el que el primero y último lugares son colaterales, así como los consecutivos, cerrando un circuito de recorrido. Fijado este orden, observemos, en cada disposición de las fichas, la sucesión de sus signos numéricos en el orden de lugares convenido y contemos las inversiones de esta sucesión.

Llamaremos *par* o *impar* la *ordenación*, según que sea par o impar este número de inversiones.

Por ejemplo, en la disposición de fichas de la figura segunda, que en el orden convenido es : 6, 9, 1, 10, 2, 8, 12, 7, 3, 5, 13, 4, 15, 11, 14, el

[4] El libro *Matemáticas e Imaginación*, de KASNER y NEWMAN, hace especial mención de este juego (que hizo furor en el siglo pasado) y cita como primer tratamiento matemático del mismo el de Johnson y Story, en «American Journal of Mathematics» (1879).

número total de inversiones es 35, mientras en la disposición de la figura 3.ª, de ordenación 1, 2, 6, 10, 11, 7, 3, 4, 8, 12, 15, 14, 13, 9, 5, el número de inversiones es 31. Ambas ordenaciones son, pues, impares.

Demostremos ahora que:

Todas las transformaciones obtenidas por movimientos del juego conservan la paridad de la ordenación de las 15 fichas.

Se observa, en efecto, en la figura 1.ª, que los números de orden de lugares colaterales son de distinta paridad, lo que implica que cualquier movimiento de ficha a un hueco colateral, si es inmediato anterior o posterior en el orden prefijado, no altera dicho orden, y si no es inmediato, dicho movimiento equivale a permutar la ficha sucesivamente con las de lugares intermedios, que son en número *par*, con lo que tampoco se altera la paridad del número de inversiones. (Recordemos que al permutar dos fichas consecutivas, sólo se altera en una unidad el número de inversiones, puesto que varía el orden relativo de dichas fichas sin modificar el orden de ellas respecto de las demás, y por tanto, un número par de permutaciones de parejas consecutivas no altera la paridad de la ordenación.)

Recíprocamente: *Todas las ordenaciones de fichas de igual paridad son obtenibles mediante movimientos del juego, partiendo de una cualquiera de ellas.*

En efecto, por corrimiento de las fichas en un sentido de recorrido del circuito ordenador, haremos correr el hueco en sentido contrario, con posibilidad de colocarle en cualquier posición. Después de intercalar de esta forma el hueco entre dos fichas consecutivas cualesquiera del circuito, podemos correr toda la culebra de fichas del mismo hasta colocar dicho hueco en posición colateral de cualquier ficha no inmediata a él, cuyo lugar en el circuito difiera del ocupado por el hueco en un número impar de lugares. Entonces el corrimiento de la ficha al hueco dará como resultado la intercalación de dicha ficha entre las dos que lo abarcaban. Mediante movimientos del juego podemos, pues, alterar la posición de una ficha cualquiera en el circuito, saltando un número par de fichas intermedias, y todo ello sin alterar el orden de las demás fichas en el circuito. En particular, un salto de dos lugares equivale a una permutación circular efectuada en el grupo de tres fichas: la que salta y las saltadas. De todo ello resulta la posibilidad de llevar cada ficha al lugar deseado, mediante un número par de transposiciones de fichas consecutivas, y, por tanto, la posibilidad de transformar una ordenación en otra de la misma paridad.

Estos teoremas nos permiten así predecir la posibilidad de la transformación de una ordenación en otra, sin más que observar si ambas son de igual paridad. Por ejemplo, la ordenación de la figura 2.ª es transformable en la de la figura 3.ª, y he aquí indicados los primeros movimientos que resultan de aplicar la estrategia indicada en el razonamiento anterior: Colocación del hueco en el lugar 16, o sea, junto a la ficha 6 (por movimiento de las fichas 15, 11, 14). Corriendo a él la ficha 1, hemos permutado circularmente las fichas 6, 9, 1, obteniendo la nueva ordenación 1, 6, 9, 10, 2, 8, etc. (empezando en el lugar 16). La ficha 2 no

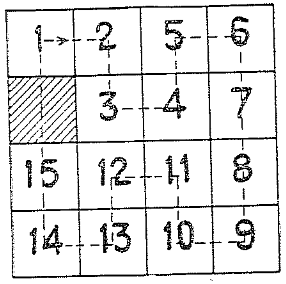


Fig. 4.ª

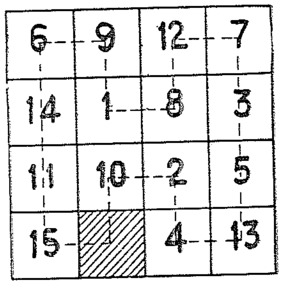


Fig. 5.ª

podrá ahora pasar a continuación de la 1, conservando el orden relativo de las demás fichas, por ser necesarias para ello *tres* transposiciones consecutivas. Pero pasando la ficha 8 delante de la 2 y de la 10, por corrimiento de la misma al hueco, la nueva ordenación será 1, 6, 9, 8, 10, 2, etc., y queda preparada la ficha 2 para pasar al segundo lugar mediante *cuatro* transposiciones consecutivas. La sucesión de fichas movidas para alcanzar este resultado, según la línea estratégica indicada, es 2, 10, 8, 9, 6, 1, 14, 11, 15, 4, 13, 5, 3, 7, 12, 2, 10, 8, 9, 6, 2. Se comprende la posibilidad de proceder análogamente para colocar las fichas restantes. Si el cambio de lugar de cada ficha equivale a un número par de saltos consecutivos, basta correr la culebra de fichas hasta enfrentar el hueco a ocupar con la ficha a transponer. Si equivale a un número impar de saltos, transpóngase previamente la ficha anterior o posterior de dos lugares, por encima de la que se desea transponer, y procédase luego como en el caso anterior.

Se comprende que esta estrategia, por su misma uniformidad, nos ha sido útil para demostrar brevemente la posibilidad del juego, pero no da en general un proceso práctico, por exigir excesivo número de movimientos. Así para avanzar o retroceder un lugar toda la culebra hacen falta 15 movimientos. Se ve fácilmente en cada caso la posibilidad de establecer circuitos parciales oportunos que permitan colocar las fichas en su lugar con menos movimientos y aun con el mínimo de ellos, problema que no enfocamos aquí.

Observación.—Añadiremos únicamente que la paridad o imparidad de una ordenación depende, naturalmente, del orden establecido para los lugares de referencia, de tal modo que al variar este orden puede variar la paridad de determinada ordenación de fichas. Pero, en cambio, se *conserva invariante la igualdad o desigualdad* de paridades entre dos ordenaciones. Así, si en lugar de considerar como fundamental de referencia el orden de lugares de la figura primera consideramos como tal el de la figura cuarta, las disposiciones de fichas de las figuras segunda y tercera pasan a tener las ordenaciones siguientes:

6, 9, 1, 8, 12, 7, 3, 5, 13, 4, 2, 10, 15, 11, 14, con 38 inversiones
1, 2, 6, 7, 3, 4, 8, 12, 15, 11, 10, 14, 13, 9, 5, con 28 inversiones

también ambas de la misma paridad, aunque distinta de la anterior.

Se comprende que así resulte, interpretando la nueva ordenación de lugares, como una transformación de la ordenación anterior, y, por tanto, perteneciente al grupo total de permutaciones posibles de las fichas (dando al 16 el significado de hueco). Por el carácter multiplicativo del grupo, las dos nuevas paridades serán, pues, producto de las anteriores por la paridad de una misma transformación, y por ello conservan la igualdad de carácter. Variar la ordenación fundamental de referencia equivale en el fondo a aplicar al grupo un automorfismo, lo que explica la invariancia de las relaciones.

Nueva demostración del recíproco anterior.—La ordenación de lugares de la figura 4.ª sugiere otra demostración de la posibilidad de realizar las transformaciones de igual paridad. En efecto, en cualquier posición del hueco (que puede recorrer, como antes, todo el casillero sin alterar el orden de las fichas en el nuevo circuito) éste forma con las tres fichas que le preceden, o que le siguen, un cuadrado en el que podemos permutar circularmente las tres fichas sin alterar la ordenación relativa de las demás. Así, en el cuadrado de la figura 5.ª, formado por las tres fichas 10, 2, 4, y el hueco, llevando a éste la ficha 4 obtenemos la permutación circular 4, 10, 2; mientras por los movimientos 10, 2, 4, 10, obtenemos la permutación 2, 4, 10.

Combinando estos movimientos podemos, pues, permutar circularmente todas las ternas de fichas consecutivas que queramos, previa colocación del hueco en lugar adecuado. Como cada permutación circular de tres fichas equivale a dos permutaciones de parejas consecutivas, podemos también, de esta suerte, alcanzar cualquier otra ordenación que conserve la misma paridad. Toda transformación que conserva la paridad de la ordenación puede, en efecto, obtenerse multiplicando permutaciones circulares de ternas consecutivas.

§ 6. LOS FILMS MATEMATICOS

FILMS Y FILMINAS

Quisiéramos referirnos ahora tanto a los films fijos o filminas como a los móviles. Los primeros sustituyen a las antiguas proyecciones diapositivas y ya no se utilizan simplemente para comodidad del profesor en sustitución del encerado; si así fuera, representarían más bien un retroceso, ya que el dinamismo combinado de acción y comentario sobre la figura dibujada en el encerado durante la explicación, difícilmente puede sustituirse por la simple proyección de figuras preparadas. La eficacia ventajosa de las filminas sobre el encerado, debe buscarse en la multiplicidad de figuras, difícilmente realizables en una sesión ante el alumnado, bien sea por su número o por su complejidad, y, sobre todo, en su ordenación en secuencias sugeridoras de procesos de transformación o de relaciones que conduzcan a una enseñanza determinada. Siempre que no sea indispensable o conveniente la continuidad de tales transformaciones, siempre que el movimiento o deformación continua no sean sustanciales en el proceso, pueden realizarse filminas eficaces. En cambio, la filmina fracasa en cuanto pretende reemplazar al film móvil en todas aquellas ocasiones en que la expresividad del movimiento es insustituíble.

Lamentamos no poder suministrar aquí al lector una amplia información sobre las características y calidades de las filminas matemáticas existentes en el mercado internacional. Durante la única oportunidad que pude tener de conocer multitud de ellas, a raíz de la XI Reunión de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza Matemática, fuí honrado con la dirección de uno de los Grupos de trabajo sobre Modelos matemáticos, lo que me impidió la asistencia al Grupo especialmente dedicado a filminas. Nos remitimos por ello a los comentarios que, de segunda mano, hubimos de transcribir en nuestro libro sobre *Material didáctico matemático actual,* varias veces citado.

EL FILM MATEMÁTICO Y LA INTUICIÓN. MOVIMIENTO Y CONTINUIDAD

Pasando, pues, de lleno al tema del film matemático, veamos ante todo el papel que en la educación matemática le asigna el profesor suizo Nicolet, uno de los primeros y más eficaces entre sus creadores. Para Nicolet no hay conocimiento matemático pleno que no tenga una base previa en la intuición; intuición matemática que define como una «contemplación de imágenes» según procesos sugeridos por el subconsciente en el caso de un espíritu creador, o aportados por el agente docente externo en el caso del aprendizaje matemático estimulado. La certeza intuitivamente descubierta es la que, según Nicolet, despierta la necesidad de la demostración. La lógica aparece, según él, como un proceso límite de la intuición. Mientras ésa persuade, aquélla demuestra, complementándose ambas en vez de oponerse.

El mejor agente intuitivo externo para despertar en el alumno el alumbramiento de las verdades geométricas es, para Nicolet, el dibujo animado. La certeza así intuída adquiere de paso valores estéticos esenciales en la educación.

No ha de extrañar al lector que, entre los temas más indicados para su desarrollo fílmico, figuren aquellos en los que el movimiento es fundamental en la génesis de la figura. Concretamente se cuentan entre las más felices realizaciones aquellas relativas a *lugares geométricos* y sus propiedades. La génesis del lugar (arco, capaz, cónica, cardiode, estrofoide, etcétera) surge con una elocuencia, derivada del propio dinamismo generador y de su continuidad, que no admite comparación ni aun con la de los modelos dinámicos más apropiados.

En la generación del arco capaz, la misma continuidad ofrece de manera natural la transición a los casos límites extremos, en los que el ángulo pasa de inscrito a semi-inscrito. La inclusión de los puntos extremos del lugar, que deductivamente es preciso razonar aparte, con nueva demostración específica, aparece natural y convincente en el proceso genético descrito. La profesora Castelnuovo [1] ve por ello en el film matemático la

[1] Profesora italiana del Liceo Tasso, de Roma, autora de un notable libro de *Geometría intuitiva* concebido según un criterio historicista. Miembro de la Comisión Internacional para el Estudio y mejora de la Enseñanza Matemática.

considerable ventaja de introducir en la arquitectura euclidea el *principio de continuidad,* del que tanto uso se permitía hacer Poncelet, para generalizar ciertas propiedades proyectivas de figuras, pasando a posiciones límites mediante deformaciones proyectivas continuas.

A este respecto, es particularmente impresionante la elocuencia del film de Nicolet sobre generación de las tres cónicas cuando, en el caso de la hipérbola, el finísimo detalle de la regulación de velocidades del punto generador llega casi a dar material realidad a la imagen idealizada de los puntos del infinito.

DINAMISMO, GENERALIZACIÓN Y PARTICULARIZACIÓN

Pero no es solamente en la generación de lugares geométricos en donde el film matemático puede aportar valores didácticos definitivos. Al *animar* la figura relativa a una propiedad, variando, por ejemplo, las magnitudes o las posiciones de ciertos elementos, la figura adquiere una riqueza expresiva mucho mayor que la que puede derivarse del frío razonamiento euclídeo efectuado sobre ella. Puede así aparecer ante los ojos extasiados del alumno como una particularización dentro de un cuadro mucho más vasto de posibilidades, afirmándose indeleblemente, como vinculadas a tal particularización, las singularidades características de la propiedad que se trata de realzar. La posibilidad de tránsito continuo de lo particular a lo más general, o recíprocamente, con la pérdida o ganancia consiguiente de propiedades específicas, es lenguaje gráfico que sólo estaba reservado al film, o al dibujo animado.

Para no citar más que un ejemplo muy sencillo, haremos referencia al film tal vez más elemental de Nicolet y, sin embargo, lleno de sugerencias del orden dicho en torno al hecho simplicísimo de quedar una circunferencia determinada por tres puntos. Estos tres puntos aparecen brillantes sobre el fondo negro de la pantalla. Surge por un lado una pequeña circunferencia que circula libremente por el plano hasta que tropieza con uno de los tres puntos y queda prendida en él. Ha perdido parte de su libertad, pero todavía puede balancearse alrededor de este punto, y puede agrandarse y achicarse, hasta que queda prendida por otro de los puntos fijos dados. Entonces todavía puede variar, pero sólo su radio, hasta que queda sujeta por el tercer punto, sin que ya entonces sea posible ulterior variación. La experiencia se repite con varias circunferencias que, de todos

tamaños y por todos lados, van apareciendo, pasando por vicisitudes similares. Queda entonces patente la pérdida progresiva de los grados de libertad de una circunferencia cualquiera, a medida que queda obligada a pasar por uno, dos o tres puntos dados. Todas las circunferencias terminan coincidiendo en una sola. El film no llega a durar dos minutos, pero ¡cuánta riqueza de experiencia visual suministra! La determinación de un circunferencia por tres puntos, no sólo ha quedado visiblemente sugerida, sino que lo ha sido en una forma y con una significación que no puede darle el clásico razonamiento sobre una figura estática. La única circunferencia que pasa por los tres puntos, no es ya la que tiene el centro y radio que el razonamiento euclídeo y la construcción consiguiente determinan; adquiere una riqueza psicológica en la mentalidad del niño infinitamente mayor: es nada menos que el estado final a que llegan *todas* las circunferencias imaginables en el plano cuando van perdiendo sus posibilidades de movimiento y deformación al ser sujetadas sucesivamente por los tres puntos dados.

De ahora en adelante, cuando se hable al niño de una circunferencia *cualquiera* que pase por un punto dado, ya no verá solamente la que él o su profesor puedan trazar en el encerado, para apoyar el razonamiento que sobre ella quiera efectuarse, sino que pensará en todo el conjunto de posibilidades de posición y tamaño de aquella circunferencia variable del film, cuando solamente estaba prendida por un punto. El concepto de *elemento geométrico genérico* adquiere, pues, todo su valor en cuanto un film ha materializado su variación, mostrando imágenes evolutivas de sus infinitas posibilidades. Cultivar la intuición de variedades de elementos genéricos es función de la mayor importancia en la educación matemática de la juventud.

En relación con lo dicho, haga el lector la siguiente experiencia con un grupo de niños de segundo o tercer curso de Bachillerato. Formúlense las clásicas preguntas sobre cuántas rectas o cuántos planos perpendiculares a un plano dado (materializado con una carpeta) pueden pasar por un punto dado (extremo de un lápiz) y los aciertos son frecuentes. Pregúntese, en cambio, si por una recta *cualquiera* dada (sin señalar) pasa siempre un plano vertical, y los aciertos serán raros. En el primer caso, el niño ve el plano, ve el punto, y la intuición hace lo demás. En el segundo caso, tiene que imaginar no un dato, sino la infinidad de datos posibles contenidos en el concepto una recta *cualquiera* (genérica). Si piensa, por ejemplo, en una recta vertical, se aferrará a esta representación y no cuidará de variarla si no lo ha hecho antes; verá, entonces, infinidad de planos verticales pasando por la recta. Si no coloca la recta vertical es posible que no acierte a ver plano vertical alguno. Cultivemos, en cambio, la intuición de la variación del dato con imágenes animadas (por ejemplo, mostrándole una carpeta apoyada por su doblez en una aguja de tricotar, colocada en su interior) y la contestación será mucho más fácil. Después de haber visto cómo en *cualquier* posición oblicua de la aguja la carpeta encuentra por sí sola un posición de equilibrio estable vertical, mientras que, al colocarse la aguja vertical, la carpeta puede bailar locamente a su alrededor, la distinción entre el caso genérico y el caso singular es algo que ha penetrado por los sentidos. En este sencillo ejemplo el modelo material aventaja, sin duda, a cualquier imagen fílmica del mismo; pero no lo hemos traído como guión de un posible film, sino como ilustración del interés didáctico que tiene el cultivo de los conceptos genéricos en la enunciación de las propiedades y como ponderación de la ayuda que en este aspecto pueden proporcionar los films en casos menos directos y triviales, suministrando la posibilidad de ilustrar la variación de los elementos de referencia. Esta misma posibilidad facilitará grandemente la ardua tarea de las llamadas *discusiones* en las soluciones de los problemas, mostrando toda la posible variación de los datos de los mismos.

TÉCNICA DIDÁCTICA DEL FILM

Volviendo a las ideas básicas de Nicolet insistiremos en que para él el dibujo animado es el medio más eficaz para hablar a la imaginación del niño, aguzando de paso su percepción sensorial e intelectiva. Nicolet intenta con sus films que el niño recorra las etapas del conocimiento científico por las que ha pasado el matemático creador, y por ello reserva al film el papel de simple alumbrador de intuiciones. Sobre el recuerdo visual del film se operará la acción comentadora, descriptiva y analizadora, facilitando el paso de lo concreto a lo abstracto, y de lo intuído a lo razonado. Es en este momento, en que el niño pasa de receptor a agente crítico y analista, cuando el film ejerce su más beneficiosa influencia educadora.

Para conseguir todo ello, elige Nicolet hechos geométricos muy concretos y simples, de modo que la mayor parte de sus películas son extremadamente cortas. El hecho es presentado escuetamente, en toda su mayor pureza y sobriedad. Nada de letras, ni de rótulos, ni de comentarios escritos que distraigan la atención del niño sobre la figura misma. Esta y su dinámica han de hablar por sí solas. El lenguaje gráfico así empleado resulta universal y directo.

El film se proyecta una o varias veces; las que sean precisas para la memorización y descripción por parte del niño. Es impresionante la receptividad de sus sentidos recién abiertos y ávidos de información. El niño describe lo visto, y entonces el maestro puede sugerir con preguntas el proceso analítico. ¿Dónde se movía el centro de la circunferencia cuando se balanceaba alrededor del primer punto que la prendió? ¿Sabrías construirme este lugar en el encerado? ¿Qué línea describía el centro cuando la circunferencia prendida ya por dos puntos se agrandaba y achicaba? ¿Sabrías trazarlo en el encerado? ¿Y, si en lugar de estar prendida por estos dos puntos, lo fuera por estos otros dos? Y si lo está por los tres, ¿dónde está entonces el centro de la circunferencia?

Como puede apreciarse, a través de estas leves insinuaciones, el film ni es una mera ilustración de la propiedad, ya que está todo él presente en la génesis de la misma, ni puede reemplazar al maestro que, por el contrario, se vale del film para la conducción genética de la enseñanza. El film vivifica la geometría y permite la iniciación de un diálogo entre maestro y alumnos, después de haber hablado silenciosamente a la intuición de todos ellos. Nicolet coloca en el término de este proceso la aparición de la demostración lógica como necesidad que el mismo comentario analítico del film haya despertado.

HACIA UNA SÍNTESIS EXPRESIVA DEL FILM

El profesor inglés Fletcher, entusiasta del film matemático y creador de varios de ellos, quiere llegar más lejos que Nicolet en el alcance didáctico de este medio visual de enseñanza; pretende hacer del film un órgano o instrumento autónomo de comunicación o información, mediante el empleo de sus propios medios: signos y símbolos. Con ello plantea un interesantísimo problema: el de la sintaxis expresiva del film como figura dinamizada.

Analicemos con Fletcher el papel de la figura (estática) en la geometría griega. Era simplemente el soporte de los encadenamientos deductivos verbales conducentes a demostrar la propiedad que ilustraba. En la perfección lógica de tales encadenamientos y no en la elocuencia gráfica de la figura, era donde radicaba la fuerza persuasiva y convincente de los argumentos euclídeos. Desde los griegos, el rigor se ha hecho inseparable del contexto lógico verbal. Pero ¿acaso las palabras no son también símbolos y como tales sujetos a espejismos? ¿Con qué derecho hemos atribuído a los símbolos verbales la exclusividad del rigor? ¿Existe en verdad un rigor absoluto?

En estos o parecidos términos viene a colocar Fletcher el dedo en la llaga de un problema eterno: el del rigor matemático. Al pasar de la figura al lenguaje, acaso los griegos no hicieron más que liberarse del riesgo de un género de falacias (de figura) para caer en otro peligro más sutil: el de las falacias lógicas. Quien haya profundizado en los fundamentos de la lógica matemática y haya calado las dificultades de sus teóricos modernos para darle una base sólida, comprenderá la profunda verdad de este valiente reparo al exclusivismo del contexto verbal que se ha enseñoreado de los hábitos científicos desde los griegos.

Fletcher justifica esta preferencia en el hecho de que la figura estática tradicional no era en verdad elocuente; carecía de expresividad sintáctica; pero piensa que, en cuanto la figura se dinamiza, pueden los procesos transformativos operados en ella, hacerla «hablar» y darle una sintaxis expresiva capaz también de demostrar y de convencer. Así, pues, para Fletcher el film no sólo puede dar pie a una demostración lógica sugiriendo su necesidad (Nicolet), sino que puede llegar a ser capaz de *demostrar* por sí mismo con igual derecho con que lo hace la lógica verbal. Esto, naturalmente, plantea el problema de crear una sintaxis expresiva del film, una especie de lógica gráfica con sus reglas lícitas de transformación del simbolismo geométrico empleado.

Se me ocurre pensar, por ejemplo, que si describimos en un film el trazado de una elipse por el procedimiento del jardinero y repetimos luego la secuencia, prolongando uno de los radios vectores en un segmento ostensiblemente igual al otro, aparecerá en esta segunda secuencia engendrado, junto a la elipse, el círculo focal correspondiente al foco del radio vector prolongado. Todavía podemos repetir nuevamente la secuencia, dibujando ahora, en cada posición, la circunferencia variable que tiene por centro cada uno de los puntos de la elipse, y por radio, el radio vector transportado. Esta circunferencia aparecerá tangente en cada posicion a la focal, y la elipse como lugar de sus centros, es decir, l. g. de centros de una circunferencia variable que pasa por un punto fijo (foco) y es tangente a una circunferencia fija (la focal). La imagen dinamizada lo habrá así expresado todo y lo habrá dicho rigurosamente, en un lenguaje gráfico que no necesita del complemento del contexto lógico, aventajándole en su carácter universalmente inteligible.

Pienso, además, que esta expresividad sintáctica del film, puede ser lograda, no sólo en los films de carácter geométrico, sino también en otros capaces de *demostrar* propiedades aritméticas o algebraicas. Creo que no se ha obtenido todavía en los films matemáticos todo el fruto que puede lograrse de los fundidos, desvanecidos, superposiciones, tan empleados como recurso estético en los films espectaculares corrientes. Estimo que un uso acertado y sistemático del desvanecido permitiría, por ejemplo, en muchas ocasiones *concretizar* (si vale la palabra) *la operación mental de abstracción*.

Así, por ejemplo, si sobre una figura que represente un tejado trapezoidal (dibujo o fotografía), superponemos a cada teja un punto bien visible y desvanecemos luego las tejas dejando los puntos, habremos materializado una abstracción, la que sustituye el conjunto de tejas por el más abstracto de sus puntos representativos. De cada teja sólo ha quedado representada su pura y esencial condición de existir, la única que interesa para la operación de recuento. Esta puede, a su vez, efectuarse por un segundo proceso de abstracción, reemplazando cada fila por el número de sus elementos representativos. Surgirá así el concepto de sucesión de números (uno para cada fila) en progresión aritmética, como segundo grado de esquematización abstracta del conjunto de tejas del tejado. Las propiedades relativas a la equivalencia entre la suma de los términos extremos y las de los equidistantes de ellos y la que da directamente el cálculo de la suma total de la progresión, pueden visualizarse en el grado de abstracción puntual, imprimiendo un dinamismo de desdoblamiento al conjunto, seguido de un giro alrededor del punto medio de uno de los lados oblicuos del trapecio, de tal modo, que al duplicar el conjunto, lo transforma en otro de filas todas iguales (y a la suma de los términos extremos). La fórmula que da la referida suma aparecerá así con toda su prístina sencillez y podrá asociarse, además, a las que resuelven los problemas análogos: determinación de áreas de trapecios, coronas, etc., mediante un dinamismo de imágenes que acerque los procesos. La asociación de tales imágenes sugerirá así una fecunda noción de isomorfismo que quedará indeleblemente grabada en la mentalidad del espectador del film. (Brindamos este proyecto de guión a quien tenga tiempo y medios de realizarlo).

SOBRE LOS PROBLEMAS DE ESTÉTICA Y DE REALIZACIÓN

Fletcher busca en sus films el empleo de un simbolismo que pueda ser universalmente admitido. Primer intento de tal simbolismo lo constituye el uso del blanco y del negro en el trazado de líneas sobre un fondo gris (en vez de negro como es en las realizaciones de los films de Nicolet hechas por Motard) para distinguir unas de otras cuando desempeñen papeles que interesa diferenciar. El problema de tales diferenciaciones está íntimamente ligado al de los procesos de realización material y a los problemas estéticos inseparables.

Muchas veces, el objeto primordial de un film, puede no ser el de demostrar, sino el de *componer,* a la manera como combina motivos y armonías un compositor musical, o valores plásticos un arquitecto, un pintor o un coreógrafo. De aquí el valor trascendental, ya considerado por Nicolet, de los valores estéticos del film aun en los específicamente matemáticos.

En relación con el problema de la belleza expresiva del film, íntimamente ligado con el de sus posibilidades de realización, Fletcher busca un amplio apoyo en la teoría de grupos y simetrías, tanto en el plano como en el espacio. La confección del film es para Fletcher resultante de una adaptación mutua de idea y material. La realización técnica queda así vinculada a los problemas expresivos y estéticos, y la identificación entre el proyectista y el realizador acaba por crear un verdadero clima de investigación en la tarea realizadora, clima de espectación ante lo imprevisto, que le ha llevado a él mismo mucho más allá de la intención primera, a lo largo del desarrollo mismo de la idea originaria.

Fletcher ha realizado hasta el momento presente tres interesantes films de longitud y alcance mayor que los antes descritos de Nicolet: uno, de carácter mecánico sobre las configuraciones teóricas de una cuerda vibrante; otro, sobre la recta de Simpson, y otro, sobre la cardiode. En ellos acusa una técnica ya muy depurada de realización y una considerable densidad de contenido matemático. La experiencia adquirida en estas realizaciones y los numerosos estudios realizados sobre los films de otros creadores,

le ha permitido escribir un profundo y sustancial artículo «Les problèmes du film mathématique» que constituye el capítulo V de la obra tantas veces citadas sobre *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques* de la editorial Delachaux-Niestlé. A este artículo remitimos al lector interesado en detalles y consejos técnicos de realización.